



# Les cavités Fabry-Perot en mode pulsé et leurs récentes applications

R. Chiche, D. Jehanno, V. Soskov, A. Variola, F. Zomer, N. Picqué

## ► To cite this version:

R. Chiche, D. Jehanno, V. Soskov, A. Variola, F. Zomer, et al.. Les cavités Fabry-Perot en mode pulsé et leurs récentes applications. 2009, pp.1-54. in2p3-00373970

**HAL Id: in2p3-00373970**

**<https://hal.in2p3.fr/in2p3-00373970>**

Submitted on 7 Apr 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Laboratoire de l'Accélérateur Linéaire

## Les Cavités Fabry-Perot en mode pulsé et leurs récentes applications

R. Chiche, D. Jehanno, V. Soskov, A. Variola et F. Zomer

*LAL, Univ Paris-Sud, CNRS/IN2P3, Orsay, France*

N. Picqué

*LPPM, CNRS & Université Paris Sud, Orsay*

U.M.R  
de  
l'Université Paris-Sud



Institut National de  
Physique Nucléaire et de  
Physique des Particules du CNRS

# **Les Cavités Fabry-Perot en mode pulsé et leurs récentes applications**

**R. Chiche, D. Jehanno, V. Soskov, A. Variola et F. Zomer**

*LAL, Univ Paris-Sud, CNRS/IN2P3, Orsay, France*

**N. Picqué,**

*LPPM, CNRS & Université Paris Sud, Orsay*

## **Introduction**

Alfred Kastler fut le premier à étudier la réponse d'un interféromètre Fabry-Perot en mode pulsé [Kastler, 1974] mais, à notre connaissance, la première utilisation d'une cavité Fabry-Perot résonante en mode pulsé remonte à la fin des années 70. Pour exciter des transitions à deux photons hors effet Doppler, les auteurs de la référence [Teets, 1977] empilèrent des pulses laser de largeur temporelle 6ns dans une cavité emplies de gaz. Par la suite, l'utilisation des lasers pulsés à colorants pour la spectroscopie dite 'ring-down' fut proposée à la fin des années 80 [O'Keefe, 1988] ainsi que le doublage de fréquence dans une cavité externe en régime picoseconde [Persaud, 1990]. L'asservissement d'une cavité passive sur un laser à électron libre apparut à la fin des années 90 dans le cadre de la spectroscopie moléculaire [Crosson, 1999]. Néanmoins, il fallut attendre le 'boom' des lasers à blocage de modes passif des années 90 en métrologie [Hänsch, 2006] pour que la stabilisation de lasers Ti:Sa femtosecondes dans une cavité Fabry-Perot fasse son apparition [Jones, 2001].

Dans ce chapitre, nous traiterons de l'injection de cavités Fabry-Perot par des lasers à modes verrouillés en phase et plus particulièrement de leur asservissement sur celles-ci. Nous commencerons par décrire les expressions mathématiques du champ électromagnétique d'un laser pulsé dans une cavité Fabry-Perot, puis l'adaptation de la méthode d'asservissement Pound-Drever-Hall [Drever, 1983], [Black, 2001] laser/cavité au mode pulsé. Nous détaillerons ensuite les propriétés requises de ces sources laser. Notons dès à présent que le couplage d'un laser à modes verrouillés en phase et d'une cavité de haute finesse est complexe. Il ne constitue donc pas un moyen de stabiliser le laser, mais un moyen de maintenir en accord le laser et la cavité, en vue d'applications spécifiques. Enfin, nous décrirons leur application dans divers domaines et parmi les applications récentes, nous décrirons les trois suivantes : la production d'harmoniques optiques dans la région XUV, les

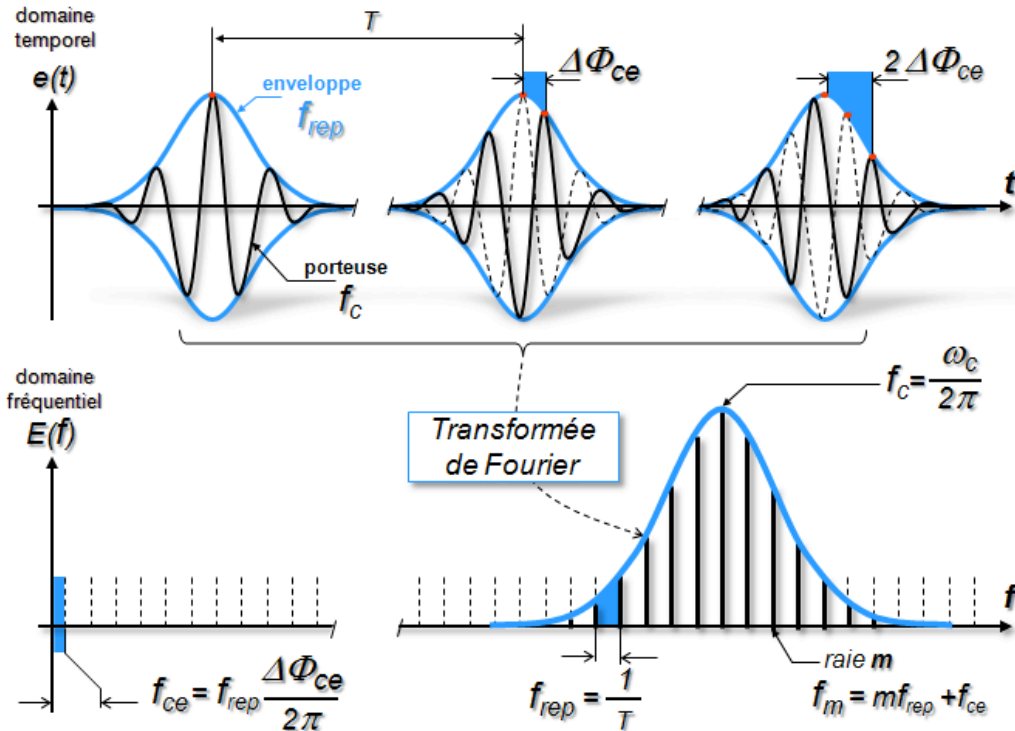
récents développements en spectroscopie et les sources de rayonnements gamma et de rayonnements X 'monochromatiques' compactes.

## A - PROPRIETES DU CHAMP D'UN LASER A BLOCAGE DE MODES PASSIF

Dériver l'expression du champ électromagnétique décrivant un faisceau laser à blocage de modes passif serait l'objet d'un cours en soi. Nous allons donc ici nous contenter de donner les formules qui nous permettront ensuite de déterminer l'expression du champ dans une cavité Fabry-Perot. Tout au long de ce cours, nous supposons que l'approximation paraxiale ainsi que l'approximation des enveloppes lentement variables (ou approximation adiabatique) sont implicitement appliquées [Diels, 2006]. En représentation temporelle, l'expression idéale du champ décrivant un faisceau laser constitué d'une infinité de pulses est ainsi donnée par [Ye, 2005], [Cundiff, 2003] :

$$e(t) = \sum_{n \rightarrow -\infty}^{n \rightarrow +\infty} e_n(t - nT) \exp(i[\omega_c(t - nT) + (\phi_0 + n\Delta\phi_{ce})]) \quad (1)$$

où l'on a omis la dépendance spatiale du champ et où (cf. Figure 1) :  $T$  est la période des pulses,  $\omega_c$  la pulsation optique des cycles du champ,  $\Phi_0$  est la phase du pulse pour  $n=0$  et  $\Phi_0 + n \Delta\Phi_{ce}$  est la différence de phase entre l'enveloppe et les cycles du champ (l'abréviation 'ce' signifiant 'Carrier to Envelop offset'),  $\Delta\Phi_{ce}$  est aussi la différence de phase entre les cycles du champ des pulses  $n$  et  $n+1$  pour tout  $n$ . Cette dernière propriété a été démontrée expérimentalement avec une précision relative meilleure que  $10^{-15}$  [Ma, 2004], [Udem, 1999], [Udem, 2002].



**Figure 1 :** représentation temporelle (en haut) et fréquentielle (en bas) du champ d'un faisceau laser pulsé.

Dans l'équation (1),  $e_n$  est l'enveloppe du champ dont on distingue couramment deux expressions [Diels, 2006].

- Enveloppe gaussienne :

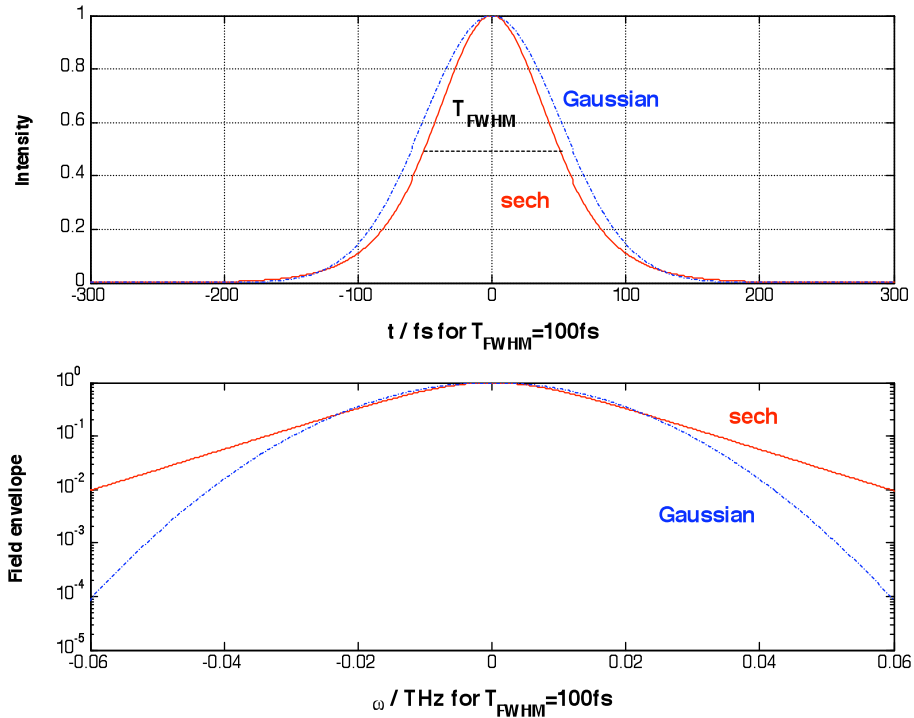
$$e_n(t - nT) = \left( \frac{4 \ln 2}{\pi \tau^2} \right)^{1/4} \exp \left( -2 \ln 2 \frac{(t - nT)^2}{\tau^2} \right) \quad (2)$$

où  $\tau$  est la largeur à mi-hauteur de la distribution de l'intensité du faisceau ( $\tau \equiv T_{FWHM}$  avec 'FWHM=Full Width at Half Maximum') que l'on définira par  $I = |e|^2$  et où l'on a arbitrairement normalisé le champ via la condition  $\int I dt = 1$ .

- Enveloppe de type soliton en sécante hyperbolique (sech), que l'on retrouve pour des faibles valeurs de  $\tau \lesssim 1$  ps.

$$e_n(t - nT) = \sqrt{\frac{\ln(1 + \sqrt{2})}{\tau}} \operatorname{sech} \left( 2 \ln(1 + \sqrt{2}) \frac{(t - nT)}{\tau} \right) \quad (3)$$

La Figure 2 montre ces deux enveloppes pour  $\tau = 100$  fs.



**Figure 2 :** Comparaison des formes des enveloppes gaussienne et sech. Graphe du haut : profil d'intensité. Graphe du bas : profil du champ en échelle logarithmique. La largeur à mi-hauteur  $\tau$  est notée  $T_{FWHM}$  dans la figure.

Comme toujours en optique linéaire, il est commode d'utiliser l'expression du champ en représentation fréquentielle [Goodman, 2005]. En posant  $\Phi_0=0$  pour alléger les expressions, puis en prenant la transformée de Fourier du champ, on obtient :

$$\begin{aligned}
 TF\{e(t)\} \equiv E(\omega) &= \sum_{n \rightarrow -\infty}^{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e_n(t-nT) \exp(i[\omega_c(t-nT) + n\Delta\phi_{ce}]) \exp(-i\omega t) dt \\
 &= \sum_{n \rightarrow -\infty}^{n \rightarrow +\infty} \exp(in[-\omega T + \Delta\phi_{ce}]) \int_{-\infty}^{+\infty} e_n(t') \exp(-i[\omega - \omega_c]t') dt' \\
 &= \sum_{n \rightarrow -\infty}^{n \rightarrow +\infty} \exp(in[-\omega T + \Delta\phi_{ce}]) E_n(\omega_c - \omega)
 \end{aligned} \tag{4}$$

avec  $t'=t-nT$  et  $E_n(\omega)=TF\{e_n(t)\}$ . Notons que  $E_n(\omega)$  ne dépend plus de  $n$  de sorte que  $E_n(\omega)=E_0(\omega)$  pour tout  $n$ . Finalement, nous simplifions l'expression précédente en utilisant la formule de Poisson et nous obtenons :

$$E(\omega) = E_0(\omega_c - \omega) 2\pi \sum_{m \rightarrow -\infty}^{m \rightarrow +\infty} \delta(-\omega T + \Delta\phi_{ce} - 2\pi m) \tag{5}$$

où  $\delta$  représente la distribution de Dirac. De cette expression, nous tirons une information primordiale : la représentation fréquentielle idéale est un peigne de fréquences (cf. Figure 1)

$$\begin{aligned}
 v_m &= \frac{\omega_m}{2\pi} = mf_{rep} + f_{rep} \frac{\Delta\phi_{ce}}{2\pi} = mf_{rep} + f_{ce} \\
 \left. \begin{aligned} \overline{e_m} &= \frac{1}{T} E_0(\omega_c - 2\pi v_m) \\ \omega_m &= 2\pi v_m \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{E(\omega) = 2\pi \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \overline{e_m} \delta(\omega - \omega_m)}
 \end{aligned} \tag{6}$$

Où  $f_{rep}=1/T$  est la fréquence de répétition des pulses. Ce peigne est donc défini par deux paramètres :

- Un paramètre décrivant l'écart entre deux pics du peigne (i.e. paramètre de 'dilatation') :  $f_{rep}$ .
- Un paramètre décrivant la position du pic correspondant à  $m=0$  (i.e. paramètre de 'translation') noté « Carrier-Envelop offset frequency » :  $f_{ce} = f_{rep} \Delta\phi_{ce}/2\pi$

Ces propriétés sont essentielles pour comprendre l'asservissement d'une cavité en régime pulsé.

Par ailleurs, pour une enveloppe gaussienne nous avons :

$$E_0(\omega_c - \omega) = \left( \frac{\tau^2}{4\pi \ln 2} \right)^{1/4} \exp\left( -\frac{\tau^2(\omega_c - \omega)^2}{8 \ln 2} \right) \tag{7}$$

et pour une enveloppe en sécante hyperbolique :

$$E_0(\omega_c - \omega) = \left( \frac{\pi^2 \tau}{4 \ln(\sqrt{2} + 1)} \right)^{1/2} \operatorname{sech} \left( \frac{\tau \pi (\omega_c - \omega)}{4 \ln(\sqrt{2} + 1)} \right) \quad (8)$$

NOTA : dans la suite du document, la représentation temporelle du champ sera notée en minuscule  $e(t)$  alors que la représentation fréquentielle sera notée en majuscule  $E(\omega)$ .

## Expression du champ pulsé dans une cavité Fabry-Perot

Nous allons considérer une cavité Fabry-Perot constituée de deux miroirs sphériques de mêmes rayons de courbure  $R$  et situés à une distance  $L$  l'un de l'autre. De plus, nous choisirons  $R$  et  $L$  tels que la configuration de la cavité soit stable [Kogelnick, 1966] et nous ne nous intéresserons qu'aux aspects temporels du champ intra-cavité [Petersen, 2003].

Nous supposons que les revêtements des miroirs de la cavité sont de la meilleure qualité possible, comme nos collègues du Laboratoire des Matériaux Avancés (LMA) de Lyon savent les réaliser. Ces revêtements sont constitués de  $N$  doubles couches  $\text{Ta}_2\text{O}_5/\text{SiO}_2$ , d'épaisseur  $\lambda_c/4n_L(\lambda_c)$  (i.e. 'quarter wave stacks' [Hood, 2001]) où  $\lambda_c = 2\pi c/\omega_c$  et où  $n_L(\lambda_c)$  est l'indice optique de la couche  $L = \text{Ta}_2\text{O}_5$  ou  $\text{SiO}_2$  pour la longueur d'onde  $\lambda_c$ . Il est à noter qu'une couche de protection d'épaisseur  $\lambda_c/2n_L(\lambda_c)$  est placée entre la première couche de  $\text{Ta}_2\text{O}_5$  et le milieu ambiant intra-cavité (en général le vide) et que le substrat est en silice. Les expressions des coefficients de réflexion et de transmission de tels miroirs sont connues et peuvent être calculées simplement [Hecht, 2002].

Par la suite, nous noterons  $r(\omega) = \rho(\omega) \exp(-i\varphi(\omega))$  (avec  $\rho(\omega), \varphi(\omega) \in \mathbb{R}$ ) le coefficient de réflexion du revêtement et nous négligerons les pertes par absorption et diffusion dans les revêtements (ce qui est justifié si l'on utilise les miroirs du LMA pour lesquels ces pertes sont de l'ordre du ppm) de sorte que  $|r(\omega)|^2 + |t(\omega)|^2 = 1$  où  $t(\omega)$  est le coefficient de transmission. Nous supposerons aussi que le revêtement est optimisé pour la longueur d'onde  $\lambda_c$ .

Comme les valeurs des indices optiques  $n_L(\lambda_c)$  dépendent du processus de fabrication des revêtements [Bennett, 1989], nous extrapolerons à partir de mesures réalisées par L. Pinard du LMA de Lyon pour effectuer les calculs numériques présentés ci-dessous.

Pour calculer l'expression du champ intra-cavité, nous allons suivre la méthode que nous a proposée notre collègue M. Lintz de l'Observatoire de la Côte d'Azur. Nous utilisons la représentation fréquentielle du champ (cf. éq.(5)) et nous allons tout d'abord calculer le champ intra-cavité correspondant à un élément du peigne de fréquences. Nous plaçant dans le cadre de l'Optique linéaire, le champ total sera finalement donné par la somme des contributions

de chacun des éléments du peigne de fréquences. Le champ circulant dans la cavité correspondant à un mode de pulsation  $\omega_m$  est donné, à un facteur  $2\pi$  près, par [Hecht, 2002] :

$$\begin{aligned} E_{m,circ} &= \tilde{t}(\omega_m) E_0(\omega_c - \omega_m) (1 + r^2(\omega_m) e^{-2i\omega_m L/c} + r^4(\omega_m) e^{-4i\omega_m L/c} + \dots) \\ &= \frac{\tilde{t}(\omega_m) E_0(\omega_c - \omega_m)}{1 - \rho^2(\omega_m) \exp(-i\Phi(\omega_m))} \end{aligned} \quad (9)$$

où  $\Phi(\omega_m) = 2[\omega_m L / c + \varphi(\omega_m)]$  et où  $\tilde{t}$  est le coefficient de transmission du miroir dans le sens substrat→revêtement ( $t$  étant le coefficient dans le sens revêtement→substrat).

La puissance correspondant au mode  $m$  stocké dans la cavité est donnée par  $P_m = |E_{m,cir}|^2$  et le gain de la cavité correspondant par :

$$g_m = \left| \frac{E_{m,circ}}{E_0(\omega_c - \omega_m)} \right|^2 = \frac{|\tilde{t}(\omega_m)|^2}{|1 - \rho^2(\omega_m) \exp(-i\Phi(\omega_m))|^2} \quad (10)$$

On retrouve donc pour chaque mode l'expression du gain en régime continu. Ce gain étant maximum quand  $\Phi(\omega_m)=0$ . En notant  $g_{m,max}$  ce maximum, nous définissons ici la finesse  $\mathbb{F}_m$  de la cavité pour le mode  $m$  par :

$$\mathbb{F}_m = \pi g_{m,max} \quad (11)$$

Nous définissons aussi la finesse  $\mathbb{F} = \text{Max}(\mathbb{F}_m)$  pour la suite de ce document.

## Conditions de résonance d'une cavité en régime pulsé

Nous pouvons maintenant déterminer les conditions de résonance mais avant, nous allons suivre le calcul de [Petersen, 2003] et écrire le développement en série de la phase du coefficient de réflexion des miroirs :

$$\varphi(\omega_m) = \varphi_c + (\omega_m - \omega_c) \tau_c + \varepsilon(\omega_m - \omega_c) \quad (12)$$

avec  $\varphi_c = \varphi(\omega_c)$ ,  $\varphi'_c = d\varphi(\omega_c)/d\omega|_{\omega=\omega_c} = \tau_c$  et où  $\varepsilon(\omega_m - \omega_c)$  inclut tous les termes d'ordres supérieurs en  $(\omega_m - \omega_c)$  de la série. Le terme de phase  $\Phi$  de l'équation (9) devient ainsi :

$$\Phi(\omega_m) = \omega_m \left( \frac{2L}{c} + 2\tau_c \right) + 2(\varphi_c - \omega_c \tau_c + \varepsilon(\omega_m - \omega_c)) \quad (13)$$



Puis, en utilisant l'éq.(6) :

$$\Phi(\omega_m) = 2\pi m f_{rep} \left( \frac{2L}{c} + 2\tau_c \right) + 2 \left( \frac{f_{rep} \Delta\phi_{ce}}{2} \left( \frac{2L}{c} + 2\tau_c \right) + \varphi_c - \omega_c \tau_c + \varepsilon(\omega_m - \omega_c) \right) \quad (14)$$

Pour que le mode  $m$  soit résonant dans la cavité, il faut qu'il existe un nombre entier  $p$  tel que  $\Phi(\omega_m) = 2p\pi$ . Mais pour que tous les modes soient résonants, il faut que  $\forall m \in \mathbb{Z}, \exists p_m \in \mathbb{Z} / \Phi(\omega_m) = 2p_m\pi$ . En écrivant l'éq. (14) sous la forme  $\Phi(\omega_m) = 2\pi(mq + y)$  et en négligeant dans un premier temps la dépendance en  $\omega_m$  du terme  $\varepsilon(\omega_m - \omega_c)$ , cette condition donne :

$$\forall m, n \in \mathbb{Z} \begin{cases} \Phi(\omega_m) = 2p_m\pi \\ \Phi(\omega_{m+n}) = 2p_{m+n}\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} mq + y = p_m \\ (m+n)q + y = p_{m+n} \end{cases} \quad (15)$$

$$\Rightarrow nq = p_{m+n} - p_m \Rightarrow qn \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{Z} \Rightarrow q \in \mathbb{Z} \Rightarrow y \in \mathbb{Z}$$

or :

$$q = f_{rep} \left( \frac{2L}{c} + 2\tau_c \right) \Rightarrow f_{rep} = q \times ISL \quad (16)$$

avec  $\frac{1}{ISL} = \frac{2L}{c} + 2\tau_c$

où  $ISL$  est l'Intervalle Spectral Libre. Son inverse est le temps d'aller-retour  $2L/c$  d'un pulse laser dans la cavité, corrigé du retard  $2\tau_c$  accumulé par les réflexions sur les revêtements des deux miroirs.

Et par suite, il vient :

$$\forall m \in \mathbb{Z}, \frac{q\Delta\phi_{ce}}{2} + \varphi_c - \omega_c \tau_c + \varepsilon = (p_m - mq)\pi \quad (17)$$

$$\Rightarrow \Delta\phi_{ce} = \frac{-2}{q}(\varphi_c - \omega_c \tau_c + \varepsilon)$$

Les deux équations (16) et (17) constituent donc les conditions de résonance sur les deux degrés de liberté  $f_{rep}$  et  $\Delta\phi_{ce}$  du peigne de fréquences. A partir de ces équations, on peut aussi définir une condition de résonance sur  $f_{ce} = f_{rep} \Delta\phi_{ce}/2\pi$  :

$$f_{ce} = \frac{ISL}{\pi} (-\varphi_c + \omega_c \tau_c - \varepsilon) \quad (18)$$

En posant  $q=1$ , on peut introduire un terme  $\Delta\phi_{ce,cav}$ , qui ne dépend que des propriétés chromatiques des revêtements des miroirs, et réécrire les équations (17) et (18) sous la forme :

$$\Delta\phi_{ce} = \Delta\phi_{ce,cav} \equiv -2(\varphi_c - \omega_c \tau_c + \varepsilon) \Leftrightarrow f_{ce} = ISL \frac{\Delta\phi_{ce,cav}}{2\pi} \quad (19)$$

L'inspection de l'équation (16) montre qu'en première approximation la fréquence de répétition du faisceau laser doit coïncider avec une 'harmonique'  $q$  de la fréquence d'un aller-retour dans la cavité  $c/2L$ . Dans la suite, nous ne considérerons donc que le cas  $q=1$ .

Notons que l'on peut montrer que la vitesse de groupe dans la cavité a pour expression  $1/v_g = 1/c + \tau_c/L$  lorsque l'on prend en compte le retard induit par les revêtements des miroirs. Nous pouvons donc réécrire la condition de l'éq. (16) sous la forme  $f_{\text{rep}} = v_g/2L$  en supposant que l'épaisseur des revêtements est bien plus petite que  $L$ .

L'équation (17) nous montre que si l'on ne prend pas en compte le déphasage induit par la réflexion sur les miroirs, alors  $\Delta\phi_{\text{ce}}$  doit être asservie sur un multiple de  $2\pi$ . Lorsque l'on prend en compte ce déphasage, on remarque que le terme  $\varphi_c - \omega_c \tau_c$  ne pose pas de problème puisqu'il translate juste la valeur de référence de l'asservissement mais que, par contre, le terme  $\varepsilon(\omega_m - \omega_c)$  induit une limitation sur le couplage des modes dans la cavité. En effet, imaginons que la condition (17) soit satisfaite pour une valeur de  $m$  donnée, alors, puisque  $\varepsilon$  dépend de  $m$ , cette condition ne sera pas satisfaite pour les autres valeurs de  $m$ . Notons les propriétés importantes suivantes [Petersen, 2003], [Thorpe, 2005], [Schliesser, 2006] :  $\varepsilon(\omega_m - \omega_c) \neq 0$  pour  $\omega_m \neq \omega_c$  et  $\varepsilon(\omega_m - \omega_c) \ll \pi$ . On conçoit donc que plus les pulses sont courts temporellement (i.e.  $\tau$  est petit), plus le peigne de fréquences est large et plus  $\varepsilon$  varie du centre au bord du spectre. C'est ce phénomène qui limite le couplage du spectre d'un laser femtoseconde à une cavité Fabry-Perot.

## Gain intra-cavité en régime pulsé

Prenons un exemple concret pour quantifier cet effet. Choisissons un laser Ti:Sa tel que  $f_{\text{rep}} = 75\text{MHz}$  et  $\lambda_c = 800\text{nm}$ . En outre, supposons que le peigne de fréquences est entièrement asservi à la cavité et que la condition de résonance (17) est remplie pour  $\omega = \omega_c$ . La puissance totale intra-cavité s'écrit alors :

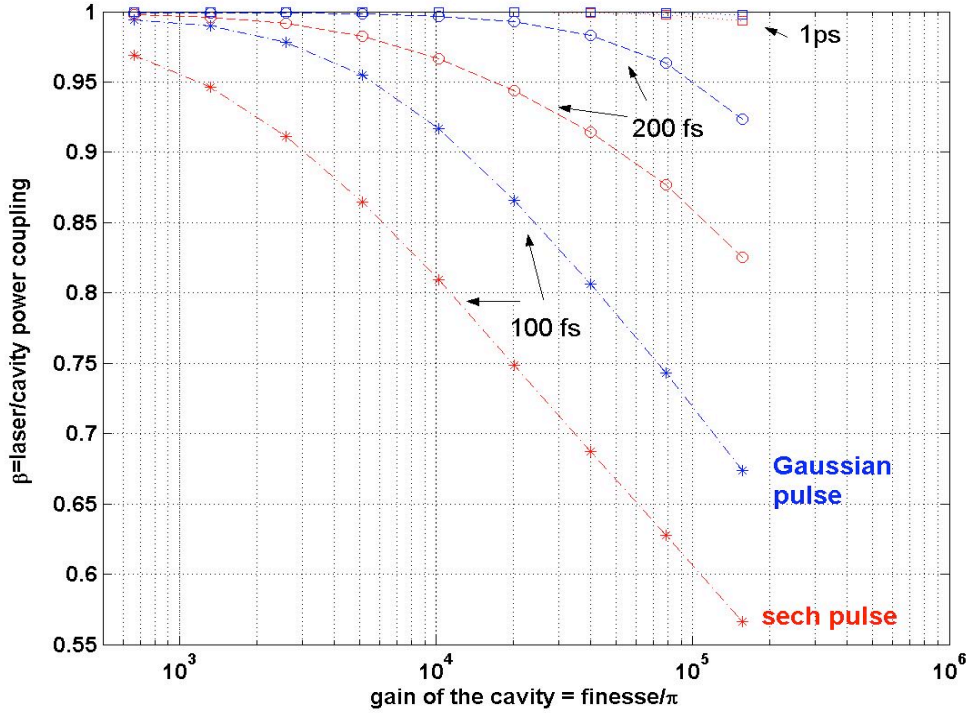
$$P_{\text{circ}} = \sum_{m \rightarrow -\infty}^{m \rightarrow +\infty} |E_{m,\text{circ}}|^2 = \sum_{m \rightarrow -\infty}^{m \rightarrow +\infty} \frac{|\tilde{t}(\omega_m)|^2 |E_0(\omega_c - \omega_m)|^2}{\left( \left[ 1 - \rho^2(\omega_m) \right]^2 + 4\rho^2(\omega_m) \sin^2(\varepsilon(\omega_m)) \right)^2} \quad (20)$$

Pour montrer l'effet du terme  $\sin(\varepsilon)$ , on définit le couplage  $\beta$ :

$$\beta = \frac{P_{\text{circ}}|_{\varepsilon \neq 0}}{P_{\text{circ}}|_{\varepsilon = 0}}. \quad (21)$$

La Figure 3 montre  $\beta$  en fonction du gain  $g_{\text{c,max}} = 1/(1 - \rho^2(\omega_c))$  pour trois largeurs temporelles  $\tau = 100\text{fs}$ ,  $200\text{fs}$ ,  $1\text{ps}$  et pour les deux types d'enveloppes,

gaussienne et sécante hyperbolique. On remarque que le couplage est plus faible pour les pulses en sécante hyperbolique car ceux-ci présentent des queues de distribution en  $\omega \rightarrow \pm\infty$  plus importantes que les pulses gaussiens (cf. Figure 2). On remarque aussi que la perte de couplage est quasi inexistante pour  $\tau \sim 1\text{ps}$  et qu'elle devient rapidement importante à mesure que  $\tau$  décroît et que la finesse augmente.



**Figure 3 :** Facteur de couplage  $\beta$  (cf. texte) en fonction du gain de la cavité pour différentes formes d'enveloppe et différentes largeurs temporelles  $\tau$ .

### Précision requise sur le contrôle de $f_{rep}$ et $\Delta\phi_{ce}$ pour l'asservissement laser/cavité

Supposons à nouveau que le mode  $m$  soit asservi en fréquence sur la cavité et que l'on fasse varier ensuite lentement  $\omega_m$ . La question est de savoir quel intervalle de variation induit une variation du gain  $g_m$  d'un facteur  $1/2$  par rapport à son maximum  $g_{m,max} = 1/(1 - \rho^2(\omega_m))$ . Cet intervalle, qui représente la moitié de la largeur à mi-hauteur de la fonction d'Airy, nous servira à définir la précision avec laquelle il nous faut contrôler  $\omega_m$  pour asservir le mode  $m$ .

En notant  $\delta_{1/2}$  la variation de  $\Phi(\omega_m)$  (autour de sa valeur à la résonance  $\Phi(\omega_m) = 2p\pi$ ) pour laquelle  $g_m = g_{m,max}/2$ , on peut simplement montrer (avec Maple par exemple !) que :

$$\frac{(1-\rho^2(\omega_m))^2}{|1-\rho^2(\omega_m)\exp(-i\delta_{1/2})|^2} = \frac{1}{2} \quad (22)$$

$$\Rightarrow \delta_{1/2} = \arctan \left( \frac{(1-\rho^2(\omega_m))\sqrt{6\rho^2(\omega_m)-\rho^4(\omega_m)-1}}{4\rho^2(\omega_m)-\rho^4(\omega_m)-1} \right)$$

Soit, avec  $\rho(\omega_m) \approx 1 \rightarrow \delta_{1/2} \approx 1/g_{m,\max}$ . Nous pouvons maintenant déterminer la précision avec laquelle nous devons contrôler  $\omega_m$  ou  $f_{rep}$  et  $\Delta\phi_{ce}$ . A partir de l'équation (14) et en supposant que  $c/2L \sim f_{rep}$ , on trouve :

$$\Delta(\omega_c) = f_{rep} \delta_{1/2} \approx \frac{f_{rep}}{g_{m_c,\max}},$$

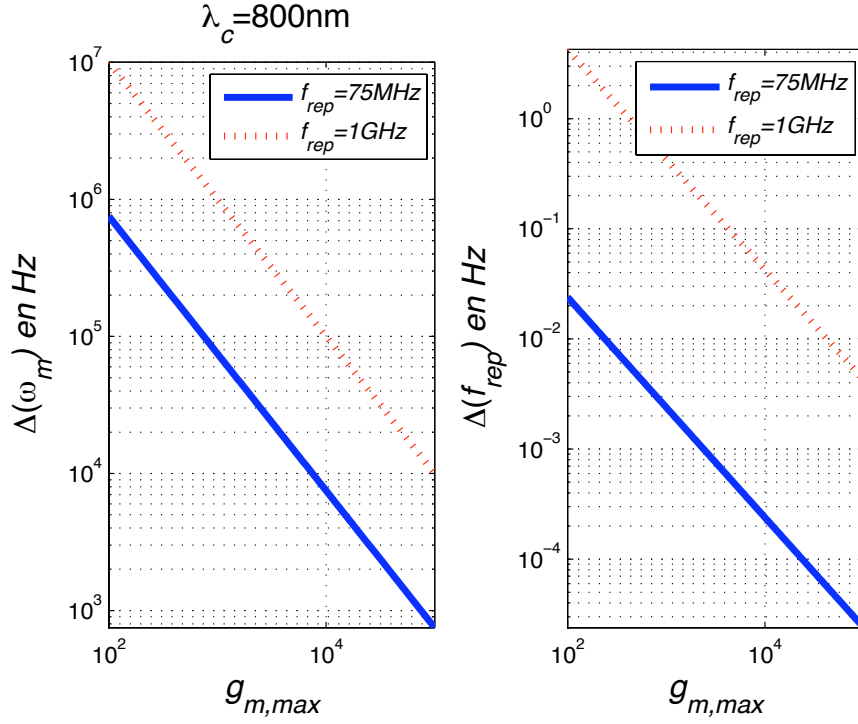
$$\Delta(\Delta\phi_{ce}) = \delta_{1/2} \approx \frac{1}{g_{m_c,\max}}, \quad (23)$$

$$\Delta(f_{rep}) = \frac{f_{rep}}{2\pi} \frac{\delta_{1/2}}{m_c} \approx \frac{f_{rep}}{2\pi m_c g_{m_c,\max}}$$

Dans la relation (23), nous avons considéré le mode  $m_c$  correspondant à  $\omega_c$  ( $m_c \sim 10^6$  pour les lasers couramment utilisés) et nous avons posé  $2\varphi_c = 0 + 2k\pi$ . Il apparait que la précision requise sur  $f_{rep}$  est phénoménale puisqu'elle est inversement proportionnelle à  $m_c$  et à  $g_{m,\max}$  qui peut atteindre des valeurs telles que 10000.

En considérant toujours l'exemple du laser Ti:Sa pour lequel  $f_{rep} = 75\text{MHz}$  et  $\lambda_c = 800\text{nm}$ , nous traçons sur la Figure 4  $\Delta(\omega_m)$  et  $\Delta(f_{rep})$  en fonction de  $g_{m,\max}$ . Ces graphes montrent qu'il faut contrôler  $f_{rep}$  à un niveau relatif de l'ordre de  $10^{-11}$ , soit un niveau absolu plus faible que le mHz sur la fréquence de répétition pour une cavité de 2m de long et un gain de  $g_{m_c,\max} \sim 10000$ . La pulsation optique doit quant à elle être contrôlée au niveau du kHz, i.e. comme dans le cas d'un laser continu asservi à une cavité de 2m de long. La contrainte sur le terme  $\Delta(\Delta\phi_{ce})$  est aussi forte puisqu'il faut le contrôler au niveau du mrad. Nous reviendrons plus loin sur l'impact de ces contraintes pour le choix de l'oscillateur laser et la conception du système d'asservissement.

Sur les graphes de la Figure 4, nous avons aussi considéré une fréquence de répétition couramment utilisée en métrologie,  $f_{rep} = 1\text{GHz}$ . On remarque immédiatement l'intérêt d'augmenter la fréquence de répétition puisque l'on réduit de deux ordres de grandeur la précision requise sur le contrôle de  $f_{rep}$  (pour un niveau de 'bruit' laser équivalent).



**Figure 4 :** Valeur de la pulsation (graphe de gauche) et de la fréquence de répétition (graphe de droite) à mi-hauteur de la courbe de gain en fonction du gain maximum.

### Comment agir sur $f_{rep}$ et $\Delta\phi_{ce}$ pour l'asservissement laser/cavité

Pour décrire les mécanismes physiques qui permettent de faire varier  $f_{rep}$  et  $\Delta\phi_{ce}$  dans une cavité laser, nous partons de la formulation de la référence [Jones, 2000] pour dériver les expressions utiles de la référence [Cundiff, 2002].

Considérons d'abord un aller-retour du faisceau dans la cavité laser. La phase accumulée au cours de cet aller-retour s'écrit :

$$\Phi_{las}(\omega) = \sum_{i=1}^{N_{comp}} \frac{2\omega n_i(\omega) L_i}{c} \quad (24)$$

où  $\omega$  est une des composantes du spectre de la radiation laser;  $n_i$  et  $L_i$  sont respectivement l'indice optique et l'épaisseur du  $i^{ème}$  des  $N_{comp}$  composants contenus dans la cavité laser (nous avons inclus les revêtements de miroirs de la cavité laser parmi ces composants car on peut toujours écrire le déphasage induit par une réflexion sous cette forme en introduisant une longueur et un indice effectif). Pour les lasers à impulsions courtes, il est important de noter que, dans l'éq. (24), l'indice optique inclut aussi la composante non linéaire due à l'effet Kerr :

$$n_i(\omega) = n_{0i}(\omega) + n_{2i}(\omega) I(\omega) \text{ où } n_{0i}(\omega) \text{ est l'indice linéaire.}$$

La période d'un aller-retour dans la cavité laser est donnée par :  $T_{las} = \Phi'_{las}(\omega_c) = \partial \Phi_{las} / \partial \omega |_{\omega=\omega_c}$ , soit une fréquence de répétition correspondante :  $f_{rep} = 1/T_{las} = 1/\Phi'_{las}(\omega_c)$ . En introduisant l'indice optique moyen dans la cavité laser,

$$\bar{n} = \frac{\sum_{i=1}^{N_{comp}} n_i(\omega) L_i}{\sum_{i=1}^{N_{comp}} L_i} \quad (25)$$

on obtient les expressions des vitesses moyennes de groupe et de phase dans la cavité laser :

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_g} &= \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \frac{\omega \bar{n}(\omega)}{c} \right) \Big|_{\omega=\omega_c} = \frac{\Phi'_{las}(\omega_c)}{2 \sum_{i=1}^{N_{comp}} L_i} = \frac{1}{L_{RT} f_{rep}} \\ \frac{1}{v_p} &= \frac{\bar{n}(\omega)}{c} = \frac{\Phi_{las}(\omega_c)}{2 \omega_c \sum_{i=1}^{N_{comp}} L_i} = \frac{\Phi_{las}(\omega_c)}{\omega_c L_{RT}} \end{aligned} \quad (26)$$

où  $L_{RT}$  est la longueur effective d'un aller-retour et où l'on voit que la fréquence de répétition est modifiée lorsque l'on fait varier  $L_{RT}$  et/ou  $v_g$ .

Par ailleurs, en effectuant le développement en série de l'éq. (24)

$$\Phi_{las}(\omega) = \Phi_{las}(\omega_c) + (\omega - \omega_c) \Phi'_{las}(\omega_c) + \dots \quad (27)$$

En écrivant la condition de résonance  $\Phi_{las} = 2m\pi$ , on obtient :

$$2m\pi = \Phi_{las}(\omega_c) + \frac{(\omega - \omega_c)}{f_{rep}} \Rightarrow \omega \equiv \omega_m = 2m\pi f_{rep} + \Delta\phi_{ce} f_{rep} \quad (28)$$

où l'on a supposé que le régime dynamique de l'oscillateur laser est tel que les effets de dispersions d'ordres supérieurs sont compensés au cours d'un aller-retour. Cette équation est similaire à l'éq.(6) avec  $\Delta\phi_{ce} = \omega_c \Phi'_{las}(\omega_c) - \Phi_{las}(\omega_c)$ . En utilisant les expressions de l'éq.(26), on obtient finalement :

$$f_{rep} \Delta\phi_{ce} = \omega_c v_g \left( \frac{1}{v_g} - \frac{1}{v_p} \right) \quad (29)$$

On voit que  $\Delta\phi_{ce}$  peut être modifiée en jouant sur la différence entre vitesse de phase et vitesse de groupe, c'est-à-dire en jouant sur la dispersion des matériaux dans la cavité laser. Notons aussi que  $f_{rep}$  et  $\Delta\phi_{ce}$  dépendent toutes deux de  $\omega_c$ .

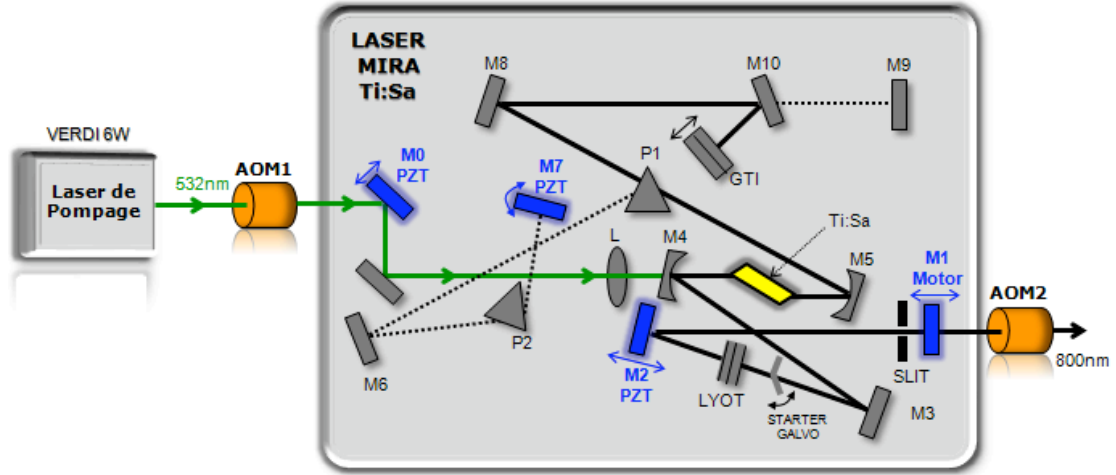
Une manière physique de comprendre l'action de la rétroaction sur les modes du peigne est d'utiliser le formalisme du point fixe, proposé par Telle et collaborateurs. Ce formalisme est très utile pour décrire les diverses contributions des bruits qui affectent la cavité du laser. L'idée de base est la suivante : changer un paramètre donné du peigne va dilater ou contracter le peigne autour d'un unique point fixe  $\nu_{fix}$ . Différentes perturbations ont différents points fixes et induisent différentes amplitudes de dilatation du peigne. La fréquence fixe  $\nu_{fix}$  ne coïncide pas nécessairement avec un pic du peigne de fréquence ni même avec le spectre du peigne, mais elle est finie à l'exception du cas très rare d'une perturbation affectant seulement  $f_{ce}$  et pas  $f_{rep}$ . Le lecteur intéressé pourra se reporter à [Telle, 2002] et [Benkler, 2005].

## **Actuateurs permettant de faire varier $f_{rep}$ et $\Delta\phi_{ce}$ pour l'asservissement laser/cavité**

Nous sommes maintenant en mesure de décrire comment faire varier  $f_{rep}$  et  $\Delta\phi_{ce}$  pour asservir le faisceau laser pulsé sur une cavité externe Fabry-Perot (ou sur toute autre référence externe). On trouvera beaucoup de détails dans la référence [Ye, 2005], nous nous contenterons ici de décrire succinctement les différents types d'actuateurs utilisés pour la stabilisation des peignes de fréquence. Nous prendrons l'exemple concret de l'oscillateur Ti:Sa (le MIRA de chez COHERENT pour être précis) schématisé sur la Figure 5.

Pour modifier  $f_{rep}$ , nous pouvons changer  $L_{RT}$  en utilisant le piézo collé sur le miroir M2, le galvo sur lequel sont montés 2 miroirs permettant de démarrer le blocage des modes et une platine de translation sur laquelle est monté le miroir de couplage M1. Ces trois actuateurs ont des bandes passantes différentes et peuvent donc être utilisés simultanément dans un asservissement comme on le verra plus loin. Comme  $f_{rep}$  dépend aussi de  $\nu_g$ , on peut aussi changer l'intensité du laser de pompe (pour les oscillateurs pompés par diode, on change le courant alimentant les diodes de pompage) grâce au modulateur acousto-optique AOM1 (cela permet d'atteindre une plus grande bande passante si nécessaire).

Pour modifier  $\Delta\phi_{ce}$  indépendamment de  $f_{rep}$ , il faut utiliser des éléments extérieurs [Jones, 2001] comme le modulateur acousto-optique fonctionnant en 'frequency shifter' (AOM2 sur le schéma, on peut aussi utiliser un modulateur électro-optique). Récemment dans [Cheng, 2008], le déplacement latéral du faisceau de pompage (piézo collé sur le miroir M0) a aussi été utilisé pour contrôler  $\Delta\phi_{ce}$  indépendamment de  $f_{rep}$ . Comme nous l'avons vu précédemment, il faut agir sur la dispersion intra-cavité pour modifier  $\Delta\phi_{ce}$ . Cela peut donc se faire en jouant sur l'intensité du pompage optique (via AOM1 sur le schéma) et lorsque l'oscillateur contient une ligne de prismes (P1 et P2 sur le schéma), en 'tiltant' le miroir M7 de manière à changer le chemin optique dans les prismes (on peut aussi translater un des deux prismes). Notons que ces derniers actuateurs modifient aussi  $f_{rep}$ .



**Figure 5 :** Schéma du laser MIRA Ti :Sa de COHERENT. En régime  $\approx 1\text{ps}$ , le prisme P1 est retiré du chemin optique et les miroirs M9, M6, M7 ainsi que les prismes P1 et P2 sont inopérants. En régime  $\approx 100\text{fs}$ , le miroir M10 est retiré et le prisme P1 est introduit dans le chemin optique. Le miroir de fond de cavité devient alors M7, et M9 ne servant qu'à aligner le système avant l'insertion de P1.

Les sensibilités des divers actuateurs aux variations de  $f_{\text{rep}}$  et  $\Delta\phi_{\text{ce}}$  dépendent grandement de la largeur temporelle des pulses et du type de laser [Ye, 2005] : avec ligne de prismes ou miroirs 'chirpés', avec blocage de modes utilisant un SESAM ou l'effet Kerr, ...

## Champ réfléchi par la cavité

Pour décrire la méthode d'asservissement du faisceau laser sur la cavité, il est nécessaire de déterminer aussi l'expression du champ réfléchi par la cavité. En suivant le même raisonnement que pour le calcul du champ intra-cavité, on obtient l'expression du champ réfléchi pour le mode  $m$  :

$$\begin{aligned}
 E_{m,\text{ref}}(\omega_m) &= E_0(\omega_c - \omega_m) \left( \tilde{r}(\omega_m) + \tilde{t}(\omega_m) t(\omega_m) \left( \frac{r(\omega_m) \exp(-2i\omega_m L / c)}{+r^3(\omega_m) \exp(-4i\omega_m L / c) + \dots} \right) \right) \\
 &= E_0(\omega_c - \omega_m) \left( \tilde{r}(\omega_m) + \frac{\tilde{t}(\omega_m) t(\omega_m)}{r(\omega_m)} \left( \frac{1}{1 - \rho^2(\omega_m) \exp(-i\Phi(\omega_m))} - 1 \right) \right) \\
 &= E_0(\omega_c - \omega_m) \tilde{r}(\omega_m) \frac{1 - \exp(-i\Phi(\omega_m))}{1 - \rho^2(\omega_m) \exp(-i\Phi(\omega_m))}
 \end{aligned} \tag{30}$$

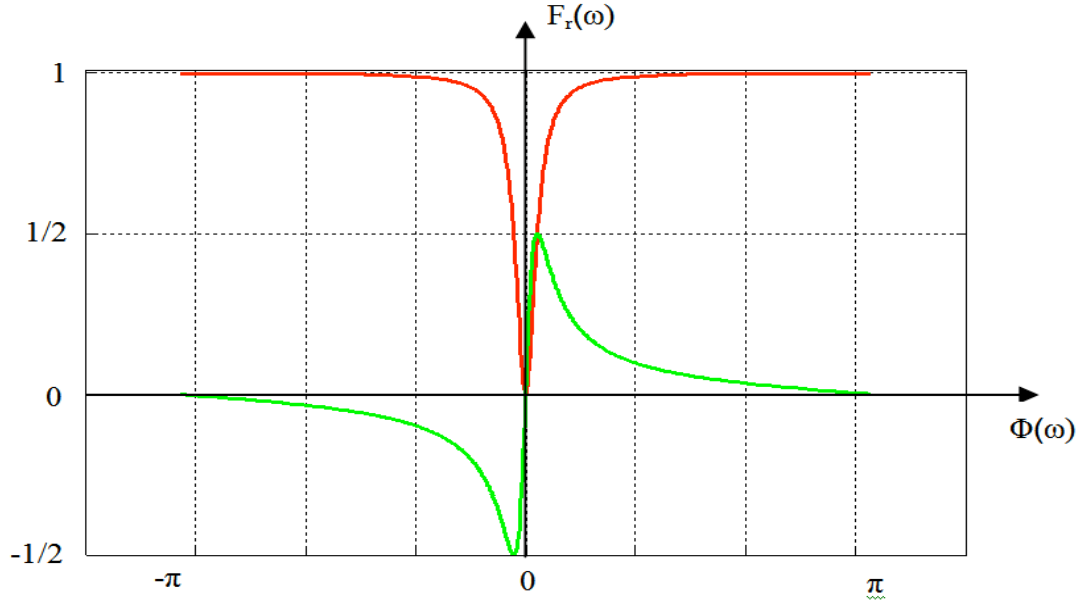
où  $\tilde{r}(\omega_m)$  décrit le coefficient de réflexion du miroir dans le sens substrat revêtement et où l'on a utilisé la propriété suivante [Yeh, 1988]



$|r|^2 (1 - t\tilde{t}/r\tilde{r}) = 1$ . On retrouve encore une fois une expression similaire à celle d'un faisceau laser continu.

Sur la Figure 6 nous avons représenté le coefficient de réflexion de la cavité défini par :

$$F_r(\omega_m) = \frac{E_{m,ref}(\omega_m)}{E_0(\omega_c - \omega_m)} = \tilde{r}(\omega_m) \frac{1 - \exp(-i\Phi(\omega_m))}{1 - \rho^2(\omega_m) \exp(-i\Phi(\omega_m))} \quad (31)$$



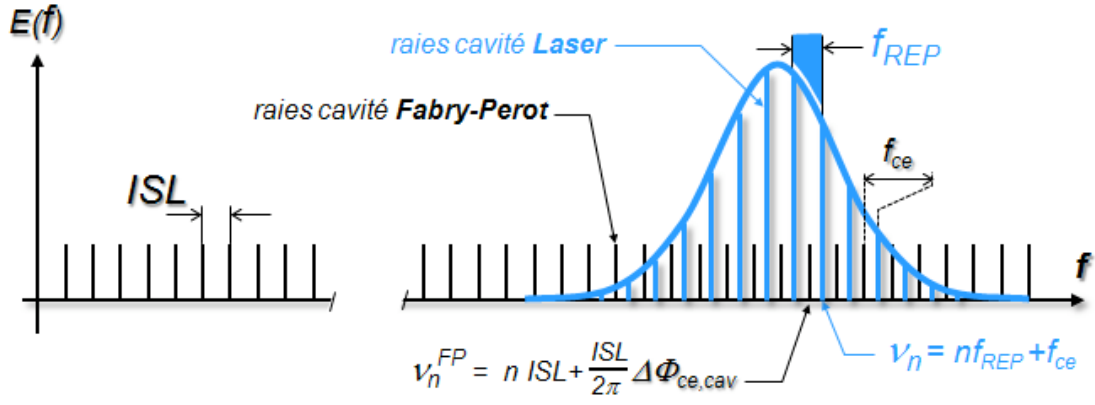
**Figure 6 :** Parties réelle (rouge) et imaginaire (vert) du coefficient de réflexion, ici pour une Finesse de 30

On constate qu'à proximité de la résonance, la partie réelle est quasiment nulle, et que la partie imaginaire se comporte linéairement.

La largeur d'absorption de la cavité Fabry-Perot est inversement proportionnelle à la finesse de la cavité ( $\Phi(\omega) < 2\pi / \mathbb{F}$ ) et donc pour les cavités de haute finesse, la partie réelle vaut 1 et la partie imaginaire vaut 0 presque partout sauf à proximité de la résonance.

## B - ASSERVISSEMENT D'UNE CAVITE EN MODE PULSE

Pour amplifier la puissance d'un laser pulsé à l'aide d'une cavité Fabry-Perot (FP), il faut que les harmoniques du faisceau laser  $v_n$  coïncident avec les fréquences de résonance  $v_n^{FP}$  de cette dernière afin que chacune d'elles soit amplifiée par le gain de la cavité FP à cette fréquence (cf. Figure 7).



**Figure 7** : représentation spectrale du champ du faisceau laser (lignes bleues) et des résonances de la cavité Fabry-Perot (lignes noires)

A partir des équations (16) et (19), on définit pour la suite les fréquences de résonance dans la cavité Fabry-Perot par :

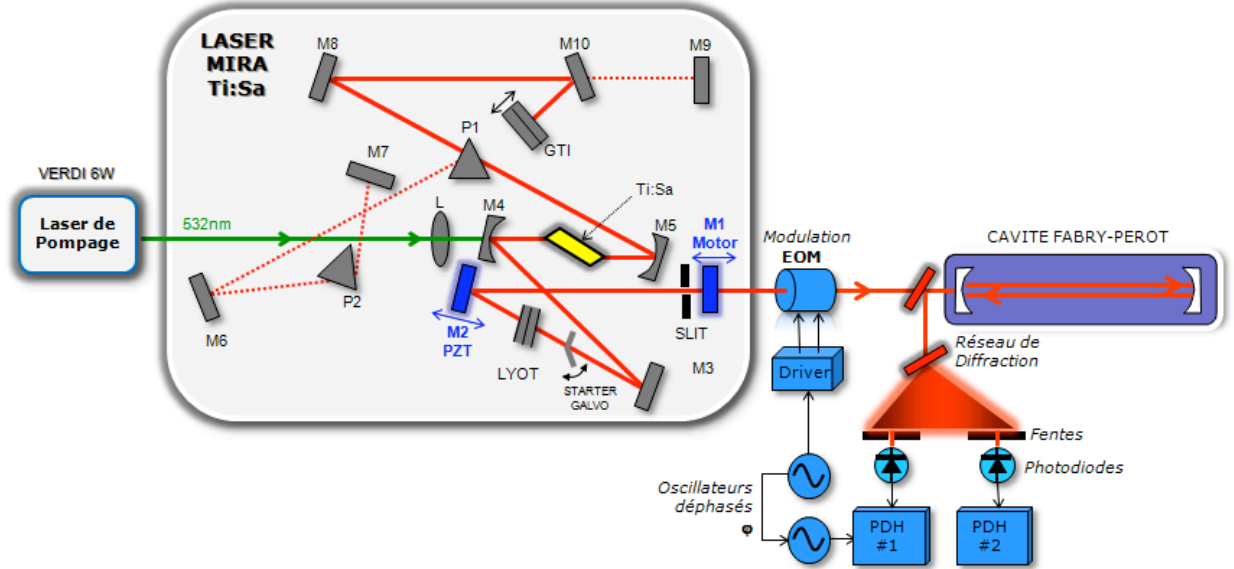
$$v_n^{FP} = \left( n + \frac{\Delta\phi_{ce,cav}}{2\pi} \right) ISL \quad (32)$$

### Méthode PDH en mode pulsé

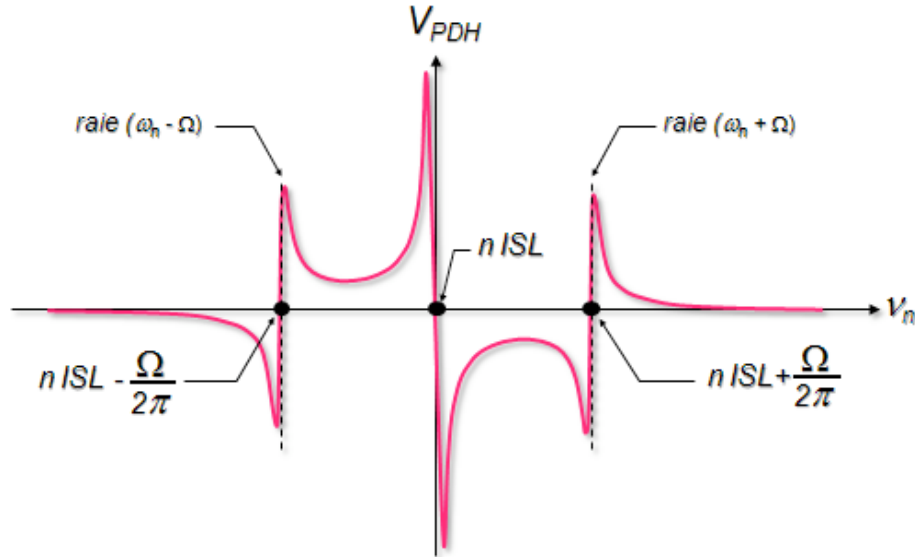
La technique communément utilisée pour aligner les harmoniques de la cavité laser avec les résonances de la cavité FP est de comparer les harmoniques du faisceau laser en bord du spectre avec les fréquences de résonance correspondantes de la cavité Fabry-Perot par la technique Pound-Drever-Hall (PDH) [Jones, 2000], [Jones, 2001], [Jones, 2004]. Si l'intervalle entre deux harmoniques du faisceau laser  $v_{n1}$  et  $v_{n2}$  correspond à l'intervalle entre deux résonances de la cavité FP  $v_{n1}^{FP}$  et  $v_{n2}^{FP}$  et que les deux harmoniques, en bord du spectre du faisceau laser, résonnent dans la cavité FP, alors toutes les harmoniques du faisceau laser résonnent aussi (aux effets près de dispersion dans les revêtements des miroirs).

Pour séparer expérimentalement les modes  $n_1$  et  $n_2$ , on utilise un réseau de diffraction qui renvoie la lumière laser avec un angle qui dépend de la longueur d'onde du champ incident et donc de la « position » du mode dans le spectre. A l'aide de deux fentes, on peut alors isoler deux harmoniques (ou 2 groupes d'harmoniques) correspondant aux deux bords du spectre du faisceau laser. On peut alors considérer les signaux en sortie des fentes comme équivalents à ceux de lasers continus. Ces signaux sont proportionnels à l'écart entre la fréquence de résonance de la cavité et les fréquences optiques de chaque bord du spectre du faisceau laser.

La Figure 8 représente un schéma typique de détection par la méthode PDH pour un laser pulsé. Cette technique exige que le faisceau incident soit modulé en phase à la pulsation  $\Omega$ , ici par un modulateur électro-optique (EOM) et démodulé avec la phase adéquate après réflexion sur le miroir d'entrée de la cavité Fabry-Perot. On obtient alors sur chacun des dispositifs de mesure un signal caractéristique de la détection PDH (cf. Figure 9).



**Figure 8** : Schéma de détection Pound-Drever-Hall en mode pulsé



**Figure 9** : Signal PDH pour une modulation à la pulsation  $\Omega$

Nous allons maintenant détailler la méthode PDH. Après la modulation de phase (cf. EOM sur la Figure 8), l'expression du champ est donnée par :

$$e_{EOM}(t) = e(t) \cdot \exp(i\beta \sin(\Omega t)) \quad (33)$$

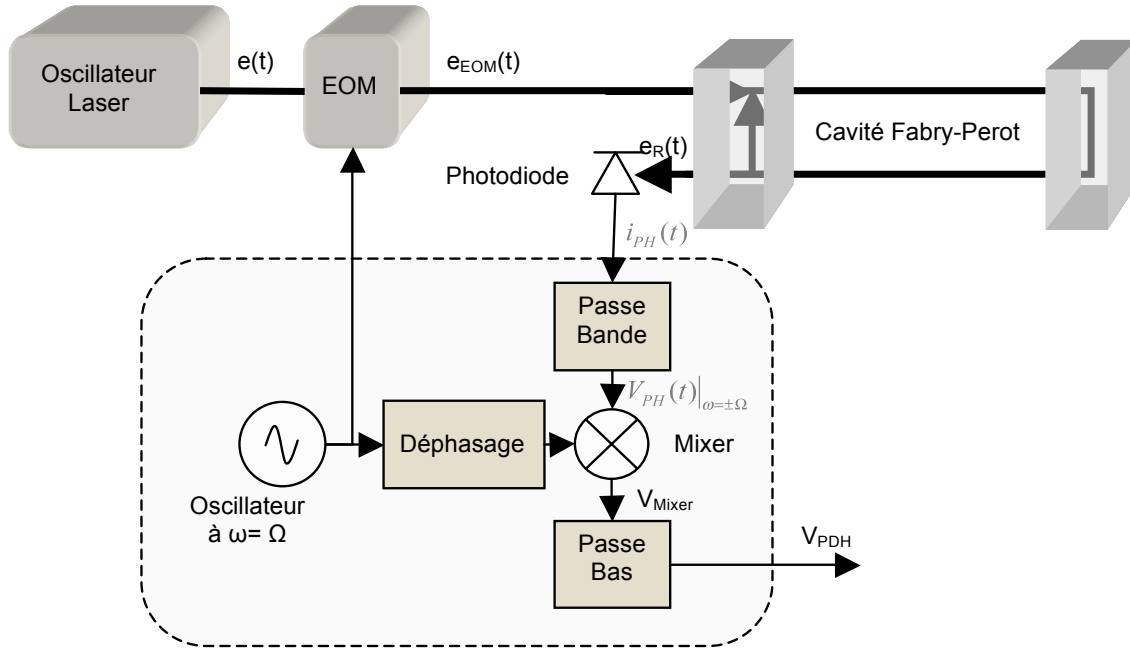
où  $\beta$  est l'indice de modulation de l'EOM. On peut décomposer cette modulation en série de Bessel et ne s'intéresser qu'à la première harmonique puisque la démodulation ne se fera qu'à cette fréquence.

$$e_{EOM}(t) \approx e(t) \cdot [1 + i\beta \sin(\Omega t)]$$

$$E_{EOM}(\omega) \approx 2\pi \sum_n e_n \left[ \delta(\omega - \omega_n) + \frac{\beta}{2} [\delta(\omega - \omega_n - \Omega) - \delta(\omega - \omega_n + \Omega)] \right] \quad (34)$$

Les termes  $e_n$  et  $\omega_n$  sont respectivement l'amplitude et la pulsation du mode  $n$  du champ laser modulé. L'équation (34) montre alors que la modulation va créer deux raies symétriques aux pulsations  $(\omega_n - \Omega)$  et  $(\omega_n + \Omega)$  autour de chaque harmonique  $\omega_n$  du faisceau laser.

Le champ réfléchi par la cavité est ensuite envoyé vers un dispositif de détection PDH présenté sur la Figure 10.



**Figure 10 :** Schéma de principe de la technique PDH

La photodiode du système de détection va produire un courant  $i_{PH}(t)$  proportionnel à la puissance incidente avec un rendement  $\eta$ . On n'exprime ce signal qu'autour de la pulsation de modulation  $\Omega$ , car le filtre passe-bande, centré sur cette pulsation, atténue toutes les autres composantes du spectre. Enfin, le courant ainsi collecté est converti en tension par une résistance  $R$  pour obtenir  $V_{PH}(t)|_{\omega=\pm\Omega}$  en entrée du mixeur. Lorsque les harmoniques du faisceau laser sont proches de la résonance, les bandes latérales dues à la modulation ne résonnent pas, et le coefficient de réflexion à ces pulsations

$F_r(\omega_n \pm \Omega)$  est donc purement réel et vaut 1. On peut alors donner une formulation de la tension en sortie du passe-bande dans ce cas :

$$\begin{aligned} V_{PH}(t)|_{\omega=\pm\Omega} &= R i_{PH}(t)|_{\omega=\pm\Omega} = R \eta p_R(t)|_{\omega=\pm\Omega} \\ &= 2R\eta\beta \sin(\Omega t) \sum_n |e_n|^2 \Im[F_r(\omega_n)] \end{aligned} \quad (35)$$

Le signal issu de la photodiode, filtré par le passe-bande, est ensuite mélangé avec un signal judicieusement déphasé pour maximiser la sensibilité de détection.

$$V_{Mixer}(t) = V_0 \sin(\Omega t) V_{PH}(t)|_{\omega=\pm\Omega} \quad (36)$$

Le filtre passe-bas a finalement pour fonction de supprimer le spectre des fréquences images autour de  $2\Omega$  :

$$V_{PDH} \simeq V_0 R \eta \beta \sum_n |e_n|^2 \Im[F_r(\omega_n)] \quad (37)$$

Si l'on balaye lentement la pulsation  $\omega_n$ , par exemple en appliquant une rampe de tension sur l'actuateur piézo-électrique collé sur le miroir M2 de la cavité laser de la Figure 5, on peut obtenir une tension sur la sortie du dispositif PDH correspondant à la Figure 9. Le pic central correspond à la résonance d'une harmonique du faisceau laser avec la cavité Fabry-Perot et les pics latéraux aux résonances des raies de modulation éloignées de  $\Omega$ .

Une propriété intéressante de ce signal est qu'il est constitué d'une partie linéaire donnant directement une information proportionnelle à l'erreur de fréquence entre une harmonique du faisceau laser et la résonance la plus proche de la cavité Fabry-Perot. Cette partie linéaire est utilisée pour la mise en œuvre d'un asservissement linéaire dont les techniques sont aujourd'hui connues et rodées et permettent une rétroaction rapide et fiable.

On peut alors exprimer la partie linéaire du signal PDH. En effet, si la cavité est proche de la résonance ( $\Phi(\omega_n) \ll 2\pi$ ), ce qui entraîne un faible écart  $\overline{\Delta v_n}$  par rapport à la fréquence de résonance, alors la partie réelle du coefficient de réflexion est négligeable devant sa partie imaginaire et celle-ci varie linéairement en fonction de la fréquence (cf. Figure 6) :

$$\begin{aligned} F_r(\omega_n) &\simeq i \frac{\tilde{r}(\omega_n)}{1 - \rho^2(\omega_n)} \Phi(\omega_n) \simeq i \frac{\mathbb{F}}{\pi} \Phi(\omega_n) \\ \Phi(\omega_n) &= 2\pi \left( n + \frac{\overline{\Delta v_n}}{ISL} \right) \Rightarrow F_r(\omega_n) \simeq i \frac{\mathbb{F}}{\pi} \frac{2\pi \overline{\Delta v_n}}{ISL} \\ \overline{V_{PDH}} &\simeq V_0 R \eta \beta \sum_n |e_n|^2 \frac{\overline{\Delta v_n}}{(ISL / 2\mathbb{F})} \end{aligned} \quad (38)$$

Comme, après le réseau de diffraction et la fente, seule une partie restreinte du spectre est envoyée sur le dispositif de détection PDH, on peut faire l'hypothèse d'un petit nombre  $M$  de modes pris en compte, ce qui entraîne que les puissances  $P_n$  de chaque mode sont quasi-identiques (égales à  $P$ ) et que les erreurs de fréquence  $\Delta\nu_n$  sur chaque mode sont très proches (égales à  $\Delta\nu$ ). On obtient alors le gain statique, noté  $\frac{V_{PDH}}{\Delta\nu}$  entre le signal PDH et l'erreur de fréquence qui est la pente du signal présenté Figure 9 lorsqu'une harmonique  $\nu_n$  du faisceau laser traverse une résonance à la fréquence ( $n$  ISL) de la cavité FP. On donnera dans le paragraphe suivant l'expression dynamique de ce même signal PDH.

$$P = P_n = |e_n|^2 \Rightarrow \frac{V_{PDH}}{\Delta\nu} \simeq \frac{V_0 R \eta \beta M P}{(ISL / 2F)} \quad (39)$$

Le succès de cette technique s'explique par sa sensibilité, proportionnelle à la Finesse de la cavité. Cela signifie que plus la largeur de résonance de la cavité Fabry-Perot est étroite (plus la Finesse est élevée et donc plus le gain est élevé à la résonance), plus cette technique est sensible à l'erreur de fréquence. Et donc, finalement, la technique PDH délivre un signal dont l'amplitude est constante quelle que soit la Finesse de la cavité FP (toutes choses restant égales par ailleurs).

## Performances de la technique PDH

La description de la technique PDH dans le paragraphe précédent ne prend pas en compte certains aspects essentiels pour son utilisation dans une boucle d'asservissement.

Tout d'abord, la réponse dynamique de la cavité Fabry-Perot n'est pas un simple gain comme l'indiquerait l'éq. (39) : la cavité agit comme un filtre qui ne laisse passer que les fréquences qui ne sont pas réfléchies [Falletto, 1999].

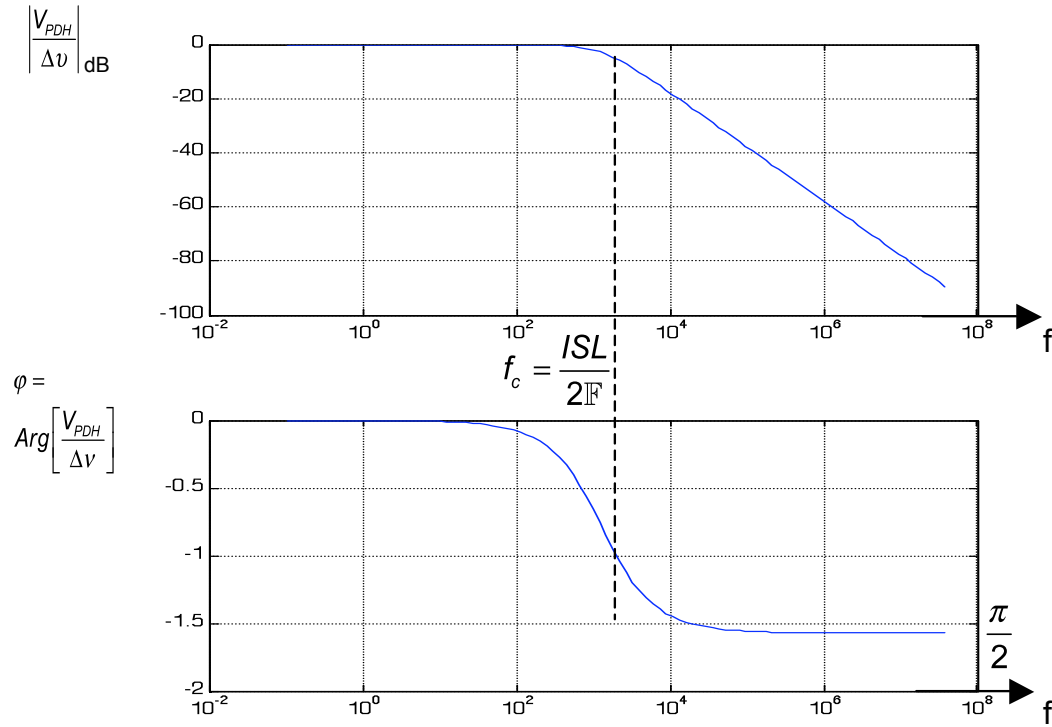
On peut, par exemple, moduler la longueur de la cavité laser à l'aide d'un transducteur piézo-électrique à une certaine fréquence, ce qui aura pour effet de moduler la fréquence de répétition de celui-ci :  $\Delta\nu(t)$ . (Attention à ne pas confondre cette modulation de très faible amplitude qui a pour seul but d'obtenir une réponse harmonique du système avec la pulsation de modulation  $\Omega$ , nécessaire à l'obtention du signal PDH et qui au contraire doit être suffisamment puissante pour obtenir une amplitude de signal exploitable).

On peut alors, si la cavité FP est asservie sur la cavité laser, mesurer cette même modulation sur le signal PDH, atténuée et déphasée. Au premier ordre, on peut raffiner la réponse fréquentielle de la cavité :

$$\Delta v(t) = \overline{\Delta v} \sin(\omega t) \Rightarrow V_{PDH}(t) = |\Delta V_{PDH}(\omega)| \sin(\omega t + \varphi(\omega))$$

$$\frac{\Delta V_{PDH}}{\Delta v}(\omega) \simeq \frac{\overline{V_{PDH}}}{\Delta v} \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{2\pi (ISL / 2F)}} \quad (40)$$

Un exemple de réponse en fréquence (module et phase), normalisée au gain statique  $\frac{\overline{V_{PDH}}}{\Delta v}$ , pour un ISL de 75 MHz et une Finesse de 30 000 est donné sur la Figure 11.



**Figure 11** : Réponse harmonique entre la tension du signal PDH et l'écart de fréquence (module normalisé au gain statique et phase)

La fréquence de coupure  $f_c$  de la réponse spectrale est définie par l'équation (40) comme étant la moitié de l'ISL divisé par la Finesse. Cela veut dire que pour une Finesse de cavité FP plus élevée, l'atténuation et le déphasage plus élevé de celle-ci devront être compensés par le gain de l'asservissement pour conserver un gain de boucle identique. Il s'agit donc d'un inconvénient puisqu'il faut être capable d'appliquer plus de gain à plus haute fréquence.

Ensuite il faut considérer l'effet du à la présence de modulation résiduelle d'amplitude (ou RAM : Residual Amplitude Modulation en anglais) du champ laser après modulation de phase par l'EOM [Whittaker, 1985]. Cette modulation résiduelle peut avoir plusieurs origines. L'une d'elles est l'imperfection du modulateur qui va produire une modulation d'amplitude (de profondeur de modulation  $\alpha$ ) en même temps qu'il produit, à la même fréquence, de la modulation de phase (de profondeur de modulation  $\beta$ ). Les

instabilités de pointage angulaire (« beam pointing instability » en anglais), couplées à la réponse de l'EOM sont aussi une source de RAM. Cette dernière dépend fortement de la pulsation de modulation  $\Omega$  choisie. On a donc tout intérêt à regarder le signal en sortie d'EOM avec un analyseur de spectre pour déterminer la pulsation donnant la modulation d'amplitude minimale. On a pu observer que le rapport de cette modulation non souhaitée à la porteuse augmente lors de la propagation du faisceau laser dans le chemin optique. Il est donc important de soigner l'alignement des éléments optiques, qui permettent le transport du faisceau laser jusqu'à la cavité FP, afin de maintenir ce rapport aussi petit que possible.

L'expression du signal PDH intégrant l'effet de RAM, à comparer avec l'équation (37), est donnée par :

$$e_{EOM}(t) = e(t) \cdot (1 + \alpha \sin(\Omega t + \varphi_\alpha)) \exp(i\beta \sin(\Omega t + \varphi_\beta))$$

$$V_{PDH} \simeq V_0 R \eta \sum_n |e_n|^2 \left[ \beta \Im \{F_r(\omega_n)\} + \alpha \cos(\varphi_\beta - \varphi_\alpha) \Re \{F_r(\omega_n)\} \right] \quad (41)$$

Où  $\varphi_\alpha$  et  $\varphi_\beta$  sont respectivement la phase de la modulation d'amplitude résiduelle et la phase de la modulation de phase. Le phénomène de RAM revient alors à obtenir un signal PDH qui est la composition de la partie réelle et imaginaire de la réponse en réflexion de la cavité FP pondérée par les indices de modulation de chacun des effets. A proximité de la résonance, c'est-à-dire pour  $\Phi(\omega)=0$  dans l'équation (31), l'offset ajouté dépend de  $F_r$  qui lui-même dépend des défauts de cavité (asymétrie des coefficients de réflexion des miroirs d'entrée et de sortie, pertes dans les substrats, défauts de couplage de mode, etc...)

Si l'on veut quantifier l'offset  $\alpha \cos(\varphi_\beta - \varphi_\alpha)$  par rapport au signal utile, il suffit de se placer hors résonance de la cavité où la partie imaginaire de  $F_r(\omega)$  est nulle et où au contraire la partie réelle de  $F_r(\omega)$  vaut 1.

Avant de décrire les performances obtenues par la méthode PDH, il nous faut introduire les outils d'analyse du signal qui permettent d'une part de choisir le 'bon oscillateur laser' et d'autre part de quantifier les performances des asservissements laser/cavité.

## C – BRUIT DE PHASE, DENSITE SPECTRALE DE PUISSANCE DE BRUIT (DSP) ET VARIANCE D'ALLAN

Le laser pulsé peut être représenté comme la superposition d'un certain nombre d'oscillateurs séparés en fréquence par  $f_{rep}$  (cf. éq.(6)). Ce qui va limiter l'amplification en puissance de ceux-ci à l'aide d'une cavité Fabry-Perot, est que le laser et la cavité FP sont soumis à des fluctuations qui vont perturber la fréquence de répétition du laser et la fréquence de résonance de la cavité FP.

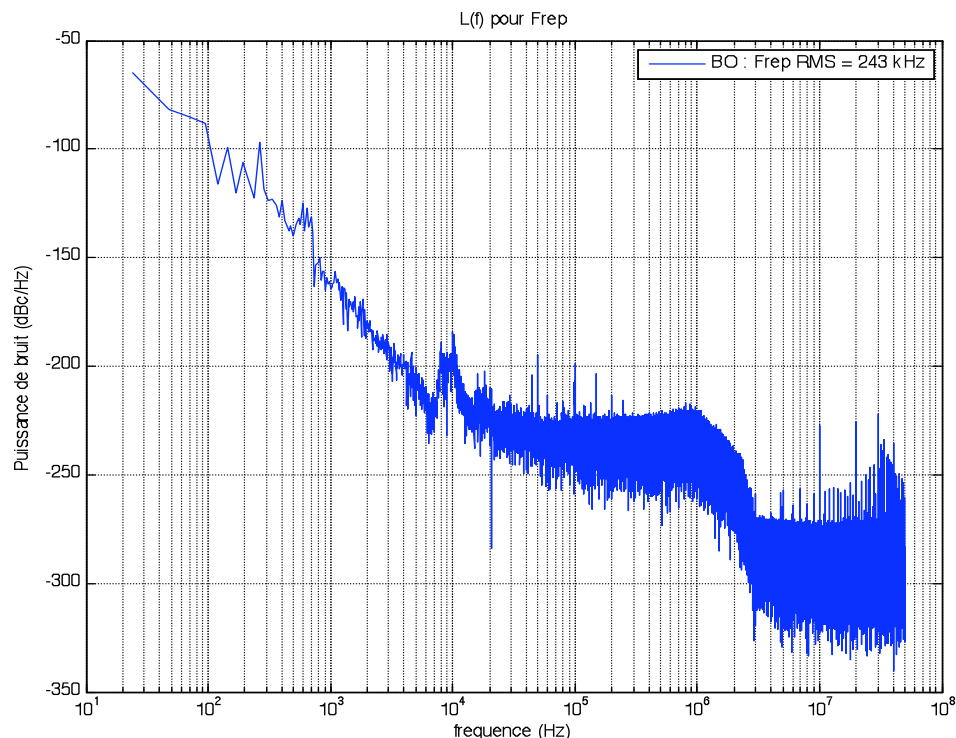


La cavité FP étant un élément passif, seules les fluctuations de sa longueur (liées aux bruits sismique et acoustique en basse fréquence et au bruit thermique dans tout le spectre) en seront la cause.

Le laser pulsé étant un élément actif, il subit non seulement les mêmes types de fluctuations qu'un élément passif mais aussi celles liées à son processus interne d'amplification.

Enfin, comme le système de rétroaction va tenter d'asservir la fluctuation du faisceau laser à celle de la cavité, il est nécessaire d'avoir un dispositif de détection (technique PDH présentée dans le paragraphe précédent) qui va convertir l'erreur de fréquence en variation de tension, exploitable électroniquement. Réciproquement, le bruit de tension de ce système de détection sera « vu » comme du bruit de phase.

La tension en sortie du dispositif PDH est donc une estimation des différents bruits de l'ensemble laser-cavité FP lorsque le système est bouclé. On peut s'en servir pour calculer le bruit de phase équivalent de  $\Delta\nu$  et donc de  $f_{rep}$ . La Figure 12 propose une mesure de ce type pour le laser Mira de Coherent. Le premier plateau, entre 10kHz et 1MHz, est lié au plancher de bruit de l'électronique de détection au pied de la porteuse. La « coupure » vers 1MHz est occasionnée par la bande passante du système de mesure et enfin le plateau après 1MHz est du au plancher de bruit de l'électronique d'acquisition de données.



**Figure 12 :** Bruit de phase de l'oscillateur Ti:Sa Mira de chez Coherent.

Pour le lecteur peu familier avec des courbes telles que celles de la Figure 12, nous définissons dans ce qui suit le bruit de phase d'un oscillateur. Un oscillateur pur a pour équation :

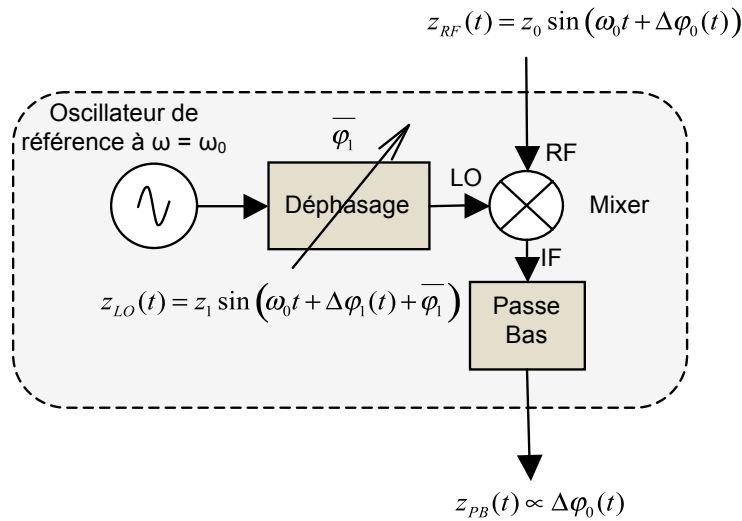
$$z(t) = z_0 \sin(\omega_0 t) \quad (42)$$

Le bruit de phase  $\Delta\varphi_0(t)$  est le bruit qui se superpose à la phase de cet oscillateur. Comme le bruit de phase est en général très faible pour les bons oscillateurs, on se contente de l'approximation au premier ordre :

$$\begin{aligned} z(t) &= z_0 \sin(\omega_0 t + \Delta\varphi_0(t)) \\ &= z_0 \left[ \sin(\omega_0 t) \cos(\Delta\varphi_0(t)) + \sin(\Delta\varphi_0(t)) \cos(\omega_0 t) \right] \\ &\simeq z_0 \left[ \sin(\omega_0 t) + \Delta\varphi_0(t) \cos(\omega_0 t) \right] \end{aligned} \quad (43)$$

On le retrouve donc comme un terme d'amplitude en quadrature avec la phase de l'oscillateur pur.

A partir d'une méthode de détection de phase standard telle que celle schématisée Figure 13, on peut donc isoler le terme de bruit de phase.



**Figure 13 :** Schéma de principe de la technique de détection de phase

On notera au passage la similitude avec une partie du schéma de la technique PDH qui reprend ce principe pour détecter la phase de la modulation du champ incident.

$$\begin{aligned} z_{IF}(t) &= k z_{RF}(t) z_{LO}(t) = k z_0 \sin(\omega_0 t + \Delta\varphi_0(t)) z_1 \sin(\omega_0 t + \bar{\varphi}_1 + \Delta\varphi_1(t)) \\ &= \frac{k z_0 z_1}{2} \left[ \cos(\Delta\varphi_0(t) - \bar{\varphi}_1 - \Delta\varphi_1(t)) - \cos(2\omega_0 t + \Delta\varphi_0(t) + \bar{\varphi}_1 + \Delta\varphi_1(t)) \right] \end{aligned} \quad (44)$$

Après le passe-bas qui supprime la fréquence image autour de  $\omega = 2\omega_0$  :

$$z_{PB}(t) = \frac{kz_0 z_1}{2} \cos(\Delta\varphi_0(t) - \overline{\varphi_1} - \Delta\varphi_1(t)) \quad (45)$$

Si on choisit la phase  $\overline{\varphi_1}$  pour être en quadrature :

$$\overline{\varphi_1} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow z_{PB}(t) = \frac{kz_0 z_1}{2} \sin(\Delta\varphi_0(t) - \Delta\varphi_1(t)) \approx \frac{kz_0 z_1}{2} (\Delta\varphi_0(t) - \Delta\varphi_1(t)) \quad (46)$$

et un excellent oscillateur pour servir de référence afin que son propre bruit de phase soit négligeable, on obtient :

$$\Delta\varphi_1(t) \ll \Delta\varphi_0(t) \Rightarrow \boxed{z_{PB}(t) \approx \frac{kz_0 z_1}{2} \Delta\varphi_0(t)} \quad (47)$$

Il faut cependant calibrer l'amplitude du signal de sortie pour extraire uniquement l'information de phase. Il existe pour cela plusieurs méthodes (modulation de fréquence ou de phase de l'oscillateur, injection de raie adjacente, etc... ) que nous ne détaillerons pas ici [Scott, 2001].

Ce signal peut ensuite, par exemple, être amplifié par un amplificateur bas bruit pour être envoyé vers un ADC pour acquisition afin de pouvoir utiliser tous les outils d'analyse qu'offre le traitement numérique du signal pour l'estimation de l'autocorrélation ou de la densité spectrale de puissance du bruit de phase.

La densité spectrale de puissance  $S_\varphi(f)$  du bruit de phase mesure la répartition de la puissance du bruit de phase en fonction de la fréquence. Cette dernière est la transformée de Fourier de l'autocorrélation  $R_\varphi(\tau)$  du signal de phase. Si on suppose le processus ergodique et stationnaire :

$$R_\varphi(\tau = t_2 - t_1) \triangleq \langle \Delta\varphi(t_2) \Delta\varphi(t_1) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \Delta\varphi(t_1 + \tau) \Delta\varphi(t_1) dt_1$$

$$\Delta\Phi(f) = TF \{ \Delta\varphi(t) \}(f) \quad (48)$$

$$S_\varphi(f) \triangleq TF \{ R_\varphi(\tau) \}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \exp(-i2\pi f\tau) R_\varphi(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|\Delta\Phi(f)|^2}{T}$$

Historiquement, on utilise une grandeur  $L(f)$ , qui est le rapport entre « La puissance de bruit d'amplitude [du signal obtenu par détection de phase] dans une bande latérale de bande passante 1Hz sur la puissance de bruit totale » [Kartaschoff, 1978]. Une norme de 1988 de l'IEEE [IEEE, 1988] l'a fixée à :

$$L(f) \triangleq \frac{S_\varphi(f)}{2} \quad (49)$$

Cette grandeur est encore celle utilisée dans tous les appareils de mesure de bruit de phase.

Une autre façon d'estimer la stabilité d'un oscillateur est celle définie par la variance d'Allan, introduite par D.W Allan en 1966 [Allan, 1966]. Comme cette variance est beaucoup utilisée pour caractériser la stabilité des oscillateurs, nous en rappelons ici la définition.

La variance d'Allan est une mesure temporelle de la stabilité d'un oscillateur, d'expression temporelle  $z(t)$ , défini par l'éq. (43), pour laquelle on peut établir une mesure instantanée d'erreur relative de fréquence  $y(t)$  qui est sans dimension :

$$\begin{aligned} z(t) &= z_0 \sin(2\pi f_0 t + \Delta\varphi(t)) \\ y(t) &= \frac{1}{2\pi f_0} \frac{d\Delta\varphi(t)}{dt} \end{aligned} \quad (50)$$

La variance d'Allan (AVAR) s'écrit alors [Barnes, 1971] :

$$\begin{aligned} \tilde{y}_k &= \frac{1}{\tau} \int_{t_k}^{t_k+\tau} y(t) dt \quad \text{et} \quad t_{k+1} = t_k + \tau \\ AVAR(\tau) &= \left\langle \frac{(\tilde{y}_{k+1} - \tilde{y}_k)^2}{2} \right\rangle \end{aligned} \quad (51)$$

Quelle relation existe-t-il entre la variance d'Allan et le bruit de phase précédemment défini ?

$$\begin{aligned} AVAR(\tau) &= \frac{1}{2\tau^2} \left\langle \left( \int_{t_k+\tau}^{t_k+2\tau} y(t) dt - \int_{t_k}^{t_k+\tau} y(t) dt \right)^2 \right\rangle \\ &= \frac{1}{2\tau^2} \left\langle \left( \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) h(\tau-t) dt \right)^2 \right\rangle = \frac{1}{2\tau^2} \langle (h(\tau) * y(\tau))^2 \rangle \\ &= \frac{1}{\tau^2} \int_0^{+\infty} S_{h*y}(f) df = \frac{1}{\tau^2} \int_0^{+\infty} |H(f)|^2 S_y(f) df \\ h(u) &= [h_v(-t_k - u) h_v(t_k + \tau + u) - h_v(\tau - u - t_k) h_v(t_k + u)] \\ \Rightarrow |H(f)|^2 &= 4 \frac{\sin^4(\pi f \tau)}{(\pi f)^2} \\ y(t) &= \frac{1}{2\pi f_0} \frac{d\Delta\varphi(t)}{dt} \Rightarrow S_y(f) = \left( \frac{f}{f_0} \right)^2 S_\varphi(f) \end{aligned} \quad (52)$$

$$AVAR(\tau) = 4 \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4(\pi f \tau)}{(\pi f_0 \tau)^2} S_\varphi(f) df$$

Comme le signal  $y(t)$  ne peut être mesuré qu'à partir d'un certain temps initial (ce qui n'est pas supposé pour établir les relations de l'éq.(52)), on doit réécrire le résultat de la variance d'Allan lorsque l'on ne prend en compte qu'une moitié du support temporel [Allan, 1988] :

$$AVAR(\tau) = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4(\pi f \tau)}{(\pi f_0 \tau)^2} S_\varphi(f) df \quad (53)$$

On voit donc que la variance d'Allan est une formulation de la variance des fluctuations de phase dont la densité spectrale de phase est pondérée par une fonction dépendante de l'intervalle de mesure  $\tau$ . Il existe plusieurs autres formulations basées sur des mesures légèrement différentes, appelées variance d'Allan modifiée MVAR, variance temporelle TVAR, etc... [Hewlett Packard, 1997].

A partir des quantités que nous venons de définir, nous pouvons maintenant revenir à notre problème et estimer les contraintes imposées par un asservissement laser/cavité sur le bruit de phase d'un oscillateur laser. Le but de cet asservissement est de coupler le maximum de la puissance du laser dans la cavité, ce qui revient à stabiliser le peigne de fréquences du faisceau laser, c'est-à-dire réduire sa 'largeur spectrale' (ou *linewidth*), proportionnellement à celle de la cavité Fabry-Perot.

Dans notre application, il est possible de mesurer le bruit de phase de la première harmonique du faisceau laser  $f_{rep}$  comme estimation du bruit de phase de la fréquence optique du mode  $n$ ,  $\nu_n = n f_{rep}$  (on néglige ici volontairement la contribution de la fréquence d'offset  $f_{ce}$ ) qu'il va falloir asservir sur la cavité Fabry-Perot. On peut alors trouver la répartition de puissance de cette fréquence du mode  $n$ .

$$\begin{aligned} \Delta f_{rep}(t) &= \frac{1}{2\pi} \frac{d\Delta\varphi(t)}{dt} \Leftrightarrow \Delta F_{rep}(f) = if \Delta\Phi(f) \\ S_{\Delta f_{rep}}(f) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|\Delta F_{rep}(f)|^2}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} f^2 \frac{|\Delta\Phi(f)|^2}{T} = f^2 S_\varphi(f) \\ \Delta \nu_n = n \Delta f_{rep} &\Rightarrow \boxed{S_{\Delta \nu_n}(f) = 2n^2 f^2 L(f)} \end{aligned} \quad (54)$$

On peut évaluer la déviation moyenne de la fréquence de répétition :

$$\Delta v_n^{RMS} \triangleq \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} S_{\Delta v_n}(f) df} \quad (55)$$

En fonction du couplage de puissance dans la cavité Fabry-Perot que l'on veut obtenir, il faudra réduire ce bruit de fréquence RMS à une fraction de la largeur spectrale. On peut simplement estimer le défaut de couplage induit par le bruit de fréquence RMS en s'inspirant des résultats de la référence [Morville, 2002], c'est-à-dire en supposant ici que le couplage entre le laser et la cavité est donné par la convolution de deux gaussiennes dont la largeur relative est donnée par le rapport  $R(\eta)$ . Par exemple, si l'on veut coupler 90% de la puissance, il faut un rapport  $R(\eta)=6$ . Pour une cavité de Finesse 3600 et un intervalle spectral libre de 75 MHz, on peut en déduire la précision nécessaire au contrôle de  $f_{rep}$ .

$$\Delta v_n^{RMS} < \frac{ISL}{FR(\eta)} \simeq 3,5 \text{ kHz} \Rightarrow \Delta f_{rep}^{RMS} < \frac{\Delta v_n^{RMS}}{n} \simeq 700 \text{ } \mu\text{Hz} \quad (56)$$

A noter que ces spécifications ne sont pas en contradiction avec les relations de l'équation (23) qui supposent que le spectre du faisceau laser est une somme de pics de Dirac (cf. éq.(6)). Le facteur  $R(\eta)$  spécifie simplement le rapport entre la largeur de la réponse en fréquence de la cavité FP et la fluctuation RMS de la position de ces pics pour garder un couplage de  $\eta$ .

La Figure 12 montre le spectre de bruit de phase  $L(f)$  lorsque le système est en boucle ouverte. On en déduit un écart de fréquence RMS de la fréquence de répétition de l'ordre de 250 kHz, presque neuf ordres de grandeur au-dessus de la contrainte spécifiée. Le système doit donc être asservi pour que l'erreur de fréquence soit réduite par le gain de la rétroaction (pour une revue sur ce sujet, cf. par exemple [Salomon, 1988], [Hall, 1999]).

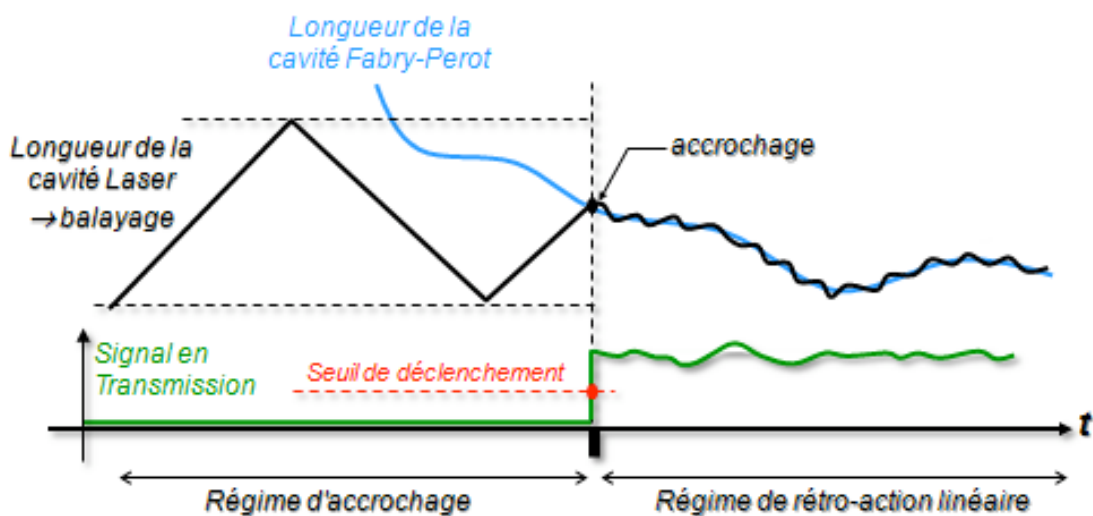
## D – METHODE D'ACCROCHAGE - REDUCTION DE BRUIT PAR RETROACTION

Une cavité laser libre est trop instable, comme le montre la Figure 12, pour qu'une cavité Fabry-Perot puisse en amplifier la puissance. De plus, même si elle était parfaitement stable, cette dernière est elle-même instable à cause principalement des bruits environnementaux.

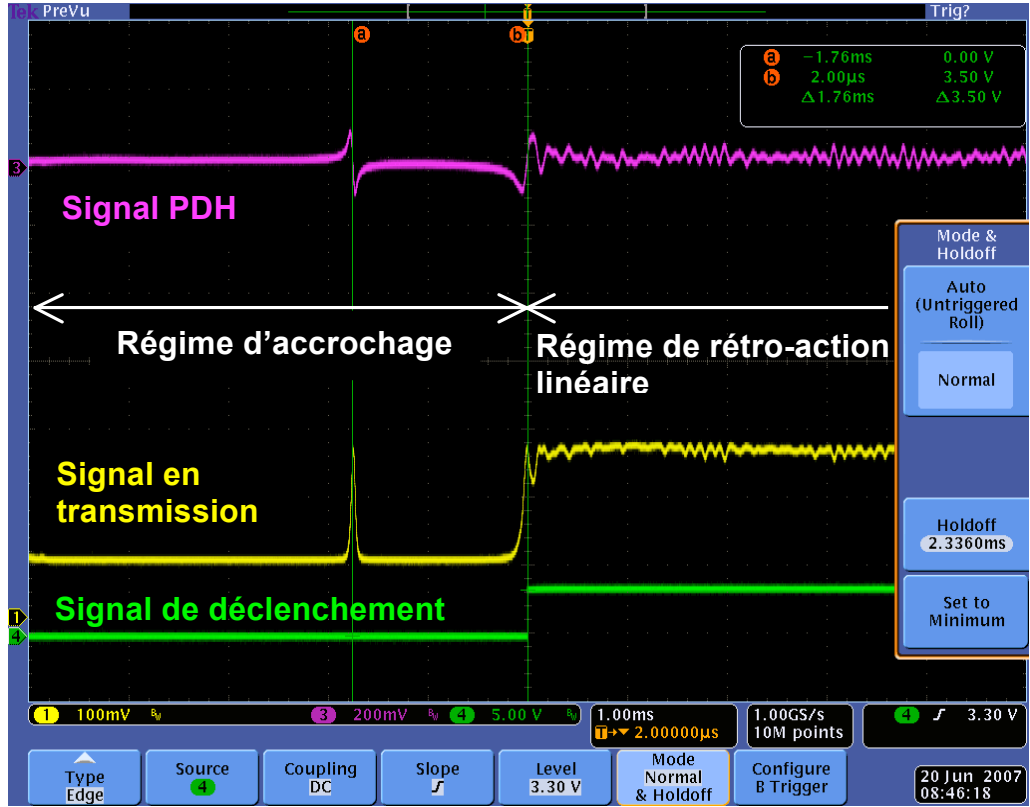
Il est donc indispensable de mesurer à tout moment l'erreur entre les harmoniques de la cavité laser et les résonances de la cavité Fabry-Perot afin de piloter correctement la cavité laser. On peut distinguer deux régimes de fonctionnement du pilotage :

- L'un en **boucle ouverte**, c'est-à-dire à priori, sans tenir compte des mesures d'erreur, avec pour objectif que les harmoniques de la cavité laser résonnent dans la cavité FP avec suffisamment peu de bruit pour que cette dernière produise des pics en transmission qui seront le signe que les deux cavités sont accordées et que l'asservissement linéaire peut démarrer. Il s'agit du régime d'**accrochage**.
- L'autre en **boucle fermée**, c'est-à-dire à posteriori, en tenant compte des mesures d'erreur, avec pour objectif d'utiliser la propriété de linéarité du signal PDH pour permettre l'utilisation des méthodes d'asservissement linéaire et compenser à tout moment les erreurs mesurées. Il s'agit du régime de **rétroaction linéaire**.

Le système de pilotage devra donc être capable de respecter les contraintes liées à ces deux modes de fonctionnement et de passer de l'un à l'autre en fonction de l'état relatif des deux cavités. La méthode communément employée est l'utilisation d'une rampe qui va balayer toutes les valeurs possibles pour  $f_{rep}$  (il faut balayer avec une amplitude suffisante pour traverser au moins 2 modes consécutifs) et qui, dans le même temps, mesure la réponse en transmission de la cavité FP. Lorsque celle-ci résonne suffisamment (on utilise un seuil de déclenchement), on enclenche la rétroaction linéaire (cf. Figure 14 et Figure 15).



**Figure 14** : Régimes de pilotage de la cavité laser



**Figure 15 :** Image de signaux réels à l'oscilloscope montrant la phase d'accrochage et la phase de rétroaction linéaire

Dans le régime d'accrochage, l'actuateur et son électronique de pilotage doivent permettre une excursion d'au moins  $f_{rep}$  pour être certain de traverser une résonance de la cavité FP. Le bruit associé à cette électronique doit être bien inférieur à la largeur de cette résonance. On peut en déduire une contrainte de bruit pour une dynamique de sortie de 1V (toujours dans le cas d'une Finesse de 3600) :

$$\Delta V^{RMS} < \frac{1V}{\mathbb{FR}(\eta)} \approx 50\mu V_{RMS} \quad (57)$$

Cette contrainte peut aussi provenir de l'actuateur lui-même si celui-ci ne peut être choisi librement. On peut aussi en déduire le nombre de bits nécessaires si la rétroaction se fait numériquement en calculant le bruit de quantification  $\Delta V_q^{RMS}$  :

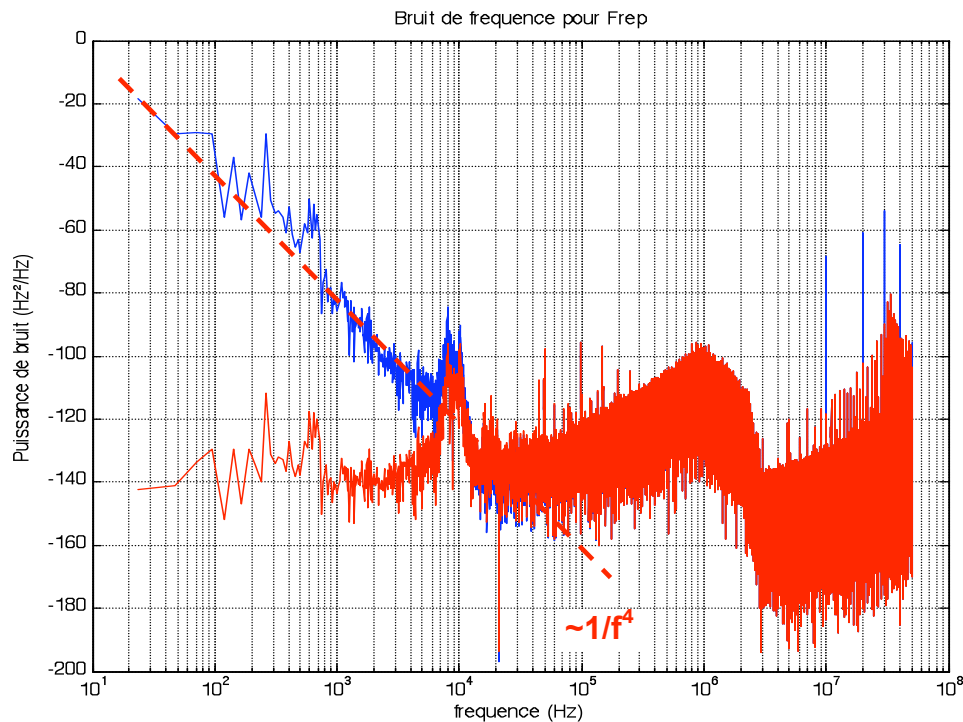
$$\Delta V_q^{RMS} \approx \frac{q}{\sqrt{12}} \sqrt{\frac{BP}{F_s/2}} < \Delta V^{RMS} = \frac{\Delta V_{\max}}{\mathbb{FR}(\eta)} \quad (58)$$

$$n > \log_2 \left( \frac{\Delta V_{\max}}{q} \right) \approx \log_2 \left( \mathbb{FR}(\eta) \sqrt{\frac{BP}{6F_s}} \right)$$



où  $F_s$  est la fréquence d'échantillonnage, BP la bande passante à asservir et  $q$  le pas quantification du système numérique. Pour 1MHz de bande passante et 100 MHz de fréquence d'échantillonnage, 10 bits sont nécessaires à l'accrochage d'une cavité FP de Finesse 3600.

Dans le régime de rétroaction linéaire, l'objectif du pilotage est de se servir des mesures d'erreur de fréquence obtenues par la méthode PDH pour corriger les différents paramètres physiques de la cavité laser afin que ses harmoniques correspondent aux résonances de la cavité FP. Pour cela, il faut à la fois être capable de compenser les fluctuations de cette dernière, restée libre, et les fluctuations propres du bruit de fréquence du faisceau laser. La Figure 16 présente une mesure de densité spectrale de puissance des fluctuations de la fréquence de répétition du laser Mira – Cohérent (celle-ci est limitée par le bruit de mesure à partir de 10 kHz comme cela a été observé pour les oscillateurs Ti:Sa [Ye, 2005]).



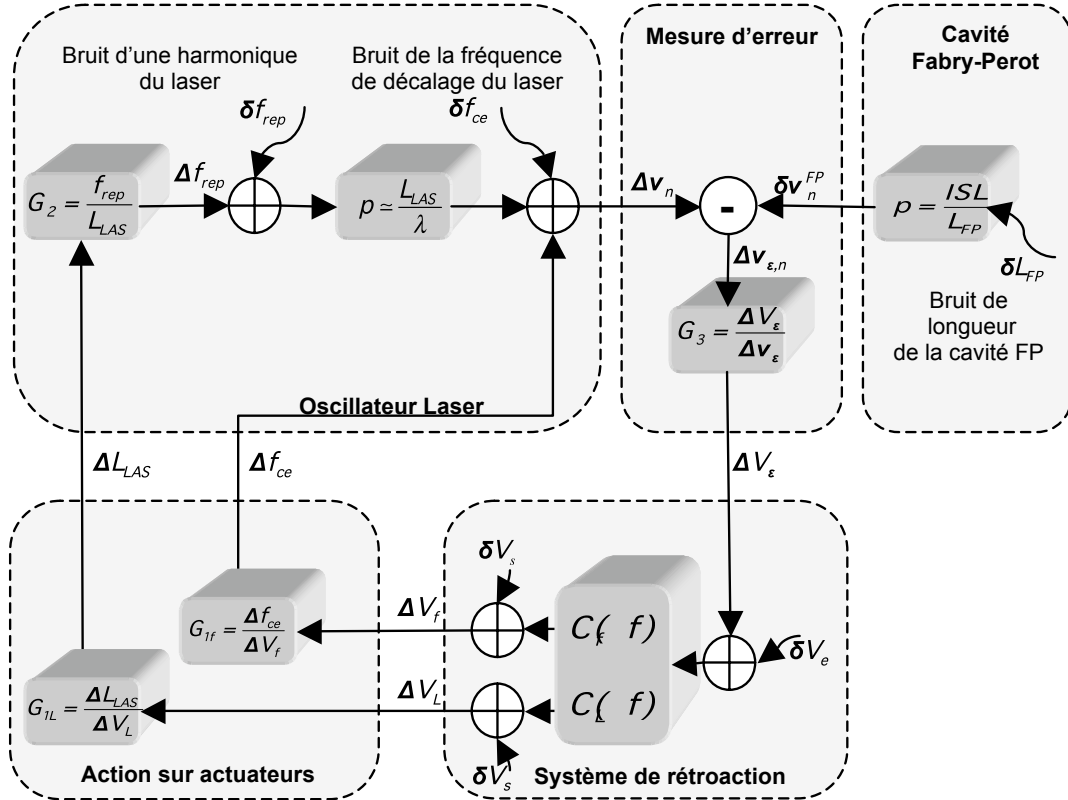
**Figure 16 :** Mesure du bruit de fréquence du laser Mira Cohérent et Comparaison du bruit de fréquence en boucle ouverte (bleu) et fermée (rouge).

Le choix de la bande passante est fonction du bruit résiduel que l'asservissement ne supprimera pas, donc au-delà de son gain unité. Si l'on prolonge la fonction en  $1/f^4$  sur tout le spectre, il faut que toute la puissance de bruit, au-delà de la fréquence à gain unité, soit inférieure au bruit RMS que l'on peut se permettre (en fonction de la Finesse) :

$$\begin{aligned}
\sqrt{2 \int_{BP}^{+\infty} S_{f_{rep}}(f) df} < \Delta f_{rep}^{RMS} &\Rightarrow \sqrt{2 \int_{BP}^{+\infty} \frac{\alpha}{f^4} df} < \frac{f_{rep}}{\mathbb{FR}(\eta)} \frac{\lambda}{L} \\
\Rightarrow \sqrt{\frac{2\alpha}{3BP^3}} < \frac{f_{rep}}{\mathbb{FR}(\eta)} \frac{\lambda}{L} &\Rightarrow BP^3 > \frac{2\alpha}{3} \left( \frac{\mathbb{FR}(\eta) L}{f_{rep} \lambda} \right)^2
\end{aligned}
\tag{59}$$

où  $\alpha$  peut être estimé à partir de la pente du signal en boucle ouverte reconstruit (cf. Figure 16 :  $\alpha \sim 40\text{dB}$ ). Dans l'exemple du bruit de fréquence du Mira et pour une Finesse de 3600, il faut une bande passante de l'ordre de 2,5 kHz.

La contribution du bruit de fréquence du faisceau laser n'est donc pas forcément prépondérante pour déterminer la bande passante de l'asservissement et il faut avant tout compenser les fluctuations de la cavité FP, restée libre et donc soumise aux bruits sismique et acoustique dont la bande passante s'étend jusqu'à la dizaine de kilohertz.



**Figure 17** : Schéma global de la boucle d'asservissement

Le schéma de la Figure 17 représente la boucle d'asservissement linéaire. On y retrouve le modèle de l'oscillateur laser (représenté par «  $p G_2$  ») qui est contrôlé par sa longueur intra cavité  $\Delta L_{LAS}$  et par le décalage en fréquence  $\Delta f_{ce}$  opéré par le « Frequency Shifter ». La grandeur utile provenant de l'oscillateur

laser est la position des harmoniques du faisceau laser  $\Delta v_n$  dont la stabilité est affectée par les perturbations de la fréquence de répétition  $\delta f_{rep}$  et de décalage  $\delta f_{ce}$ .

Les deux grandeurs contrôlant l'oscillateur laser,  $\Delta L_{LAS}$  et  $\Delta f_{ce}$  sont elles-mêmes couplées (par  $G_{1L}$  et  $G_{1f}$ ) aux variations des actuateurs pilotés par les tensions correspondantes  $\Delta V_L$  et  $\Delta V_f$  qui proviennent du système de contrôle par rétroaction (respectivement  $C_L$  et  $C_f$ ). Ce dernier permet de contrôler ces deux grandeurs mais ajoute un bruit d'entrée  $\delta V_{ce}$  et un bruit de sortie  $\delta V_{cs}$  qui sont dus aux amplificateurs utilisés en entrée et en sortie mais aussi au bruit de quantification si le système est numérique.

Le contrôle par rétroaction utilise la mesure d'erreur de fréquence par la technique PDH (dont la fonction de transfert est symbolisée par  $G_3$ ) qui mesure l'erreur de fréquence  $\Delta v_{n,\varepsilon}$  due à l'écart à la résonance  $\Delta v_n$  de la fréquence laser et l'écart à la résonance de la cavité FP  $\Delta v_n^{FP}$ , bruitée par l'activité sismique et acoustique qui agit sur sa longueur  $\Delta L_{FP}$ .

Pour simplifier l'écriture de l'équation de cette boucle, on considère que les fonctions de transfert  $C_L$  et  $C_f$  sont identiques, égales à  $C$  (le symbole  $\oplus$  définit la somme quadratique qui prévaut lorsque des bruits non corrélés se combinent) :

$$C_\omega \equiv C_L = C$$

$$\Delta v_{\varepsilon,n} \simeq \frac{\left[ \frac{ISL}{\lambda} \delta L_{FP} \oplus \delta f_{ceo} \oplus \frac{L_{LAS}}{\lambda} \delta f_{rep} \right] \oplus \left[ \left( G_{1f} + G_{1L} \frac{L_{LAS}}{\lambda} G_2 \right) C \left( \frac{\delta V_s}{C} \oplus \delta V_e \right) \right]}{1 + \left( G_{1f} + G_{1L} \frac{L_{LAS}}{\lambda} G_2 \right) G_3 C} \quad (60)$$

On appelle gain de boucle ouverte  $G_{BO}$  le produit des gains lorsque l'on parcourt la boucle d'asservissement :

$$G_{BO} = \left( G_{1f} + G_{1L} \frac{L_{LAS}}{\lambda} G_2 \right) G_3 C$$

$$\Delta v_{\varepsilon,n} \simeq \frac{\left[ \frac{ISL}{\lambda} \delta L_{FP} \oplus \delta f_{ceo} \oplus \frac{L_{LAS}}{\lambda} \delta f_{rep} \right] \oplus \left[ \frac{G_{BO}}{G_3} \left( \frac{\delta V_s}{C} \oplus \delta V_e \right) \right]}{1 + G_{BO}} \quad (61)$$

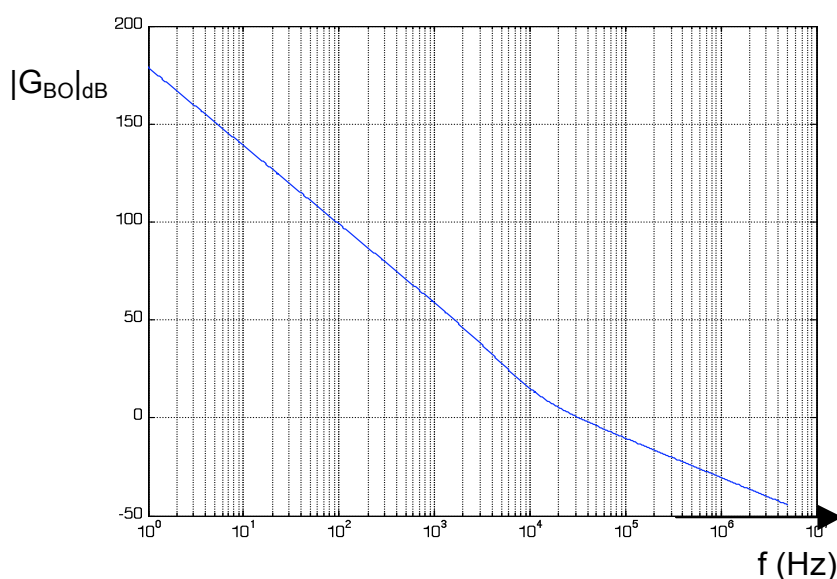
$$G_{BO} \gg 1 \Rightarrow \Delta v_{\varepsilon,n} \simeq \frac{\left[ \frac{ISL}{\lambda} \delta L_{FP} \oplus \delta f_{ceo} \oplus \frac{L_{LAS}}{\lambda} \delta f_{rep} \right]}{G_{BO}} \oplus \frac{\left( \frac{\delta V_s}{C} \oplus \delta V_e \right)}{G_3}$$

On peut comprendre l'influence du gain de boucle  $G_{BO}$  :

- Lorsque l'asservissement fonctionne :  $G_{BO} \gg 1$ . Tous les bruits, s'ils pouvaient être mesurés au niveau de la fréquence optique, seraient alors atténués par ce gain de boucle. Cela a pour conséquence que le bruit électronique ramené en entrée ( $\delta V_e$  ou  $\delta V_s/C$ ) est atténué par  $G_3$ .  $G_3$  est le gain de conversion entre fréquence optique et tension effectué par le front-end PDH (qui vaut à peu près 1V pour  $F_{rep}/F$ , soit 20 kHz pour une Finesse de 3600). Il s'ensuit donc que, pour que le bruit électronique ne dégrade pas le bruit optique voulu (cf. équation (56)) de l'ordre de 3.5 kHz, il doit être bien inférieur à 175 mV<sub>RMS</sub> (ce qui est bien au-delà de ce que l'on avait déterminé par l'équation (57) grâce à l'effet de boucle de l'asservissement). Si l'on veille à utiliser un système de contrôle (détection, asservissement, actuateur) suffisamment bas bruit, comme évoqué dans le chapitre sur la technique PDH, on est alors capable d'agir sur la stabilité relative des cavités laser et Fabry-Perot.
- Plaçons-nous maintenant au-delà de la fréquence à gain unitaire :  $G_{BO} \ll 1$ . L'asservissement, au niveau du bruit sur la fréquence optique, n'a plus aucune influence et le bruit résiduel de fréquence  $\Delta \nu_{e,n}$  est la somme de tous les bruits physiques ramenés en bruit de fréquence optique. La contribution du bruit électronique en entrée de correcteur est alors  $G_{BO}/G_3 \delta V_e$ . Comme  $G_{BO} \ll 1$ , la contribution au-delà du gain unité est donc beaucoup plus petite que celle en deçà du gain unité et donc négligeable.

En conclusion, le fait que le système se retrouve dans une boucle d'asservissement réduit l'influence des perturbations et relâche les contraintes de bruit du système d'asservissement. Pour que ce dernier soit efficace, il faut un maximum de gain aux fréquences que l'on souhaite compenser tout en respectant les règles de stabilité de la boucle.

Cela conduit à un gain en boucle ouverte typique dont l'amplitude est reproduite Figure 18. La pente importante vers les basses fréquences permet d'atténuer considérablement les fluctuations lentes qui nécessitent une grande dynamique. Par contre, lorsque l'on s'approche du gain unité, la forme de la fonction de transfert s'adapte pour permettre que le système reste stable et n'oscille ou ne diverge pas.



**Figure 18 :** Exemple de réponse en fréquence du gain en boucle ouverte

## E – Applications

La possibilité d'utiliser les cavités Fabry-Perot pour stabiliser les peignes de fréquences a été étudiée dans les réf. [Jones, 2001], [Jones, 2004]. Il ressort de ces études que les performances obtenues sont moins bonnes et plus complexes que dans le cas du mode continu et aujourd'hui, on choisit plutôt de stabiliser les oscillateurs à blocage de mode sur des horloges radiofréquences ou micro-ondes, ou en faisant battre un élément du peigne de fréquence avec un faisceau laser continu lui-même ultra-stabilisé (cf. par exemple [Cundiff, 2003]).

Ces études ont néanmoins donné lieu à une application pour laquelle un cristal acousto-optique est introduit dans la cavité de manière à sortir des pulses dont l'énergie est amplifiée par le gain de la cavité [Potma, 2003]. En pratique, un gain de  $\sim 150$  a été démontré [Vidne, 2003].

### Peignes de fréquences à grand taux de répétition

Les applications des peignes de fréquences ne sont désormais plus restreintes à la métrologie des fréquences. Un des nouveaux besoins d'applications (mise en forme d'impulsions [Weiner, 2000], télécommunications à très haut débit, étalonnage des spectromètres utilisés en astrophysique,...) est le développement de peignes de fréquences dont le taux de répétition excède 10 GHz. Développer un oscillateur à haut taux de répétition [Diddams, 2008] est évidemment difficile, voire limité, à partir d'un laser à solide ou à fibre traditionnel. Une alternative extrêmement prometteuse [Del'Haye, 2008] mais encore en plein développement est la génération de peignes de fréquences à

partir de micro-résonateurs de haute finesse. L'autre moyen privilégié est le filtrage spectral d'un peigne de taux de répétition conventionnel (100 MHz – 1 GHz) par une cavité Fabry-Perot. Les modes intermédiaires du peigne de fréquences peuvent être supprimés en choisissant l'intervalle spectral libre de la cavité Fabry-Perot égal au taux de répétition finalement souhaité.

L'intérêt d'une telle approche a déjà été démontré pour l'étalonnage des spectromètres utilisés pour la détection d'exoplanètes [Li, 2008] et a permis d'obtenir des précisions de  $9 \text{ m.s}^{-1}$  sur la mesure des déplacements Doppler [Steinmetz, 2008]. Finalement, citons une dernière référence où une idée similaire est appliquée à un oscillateur fibré pour générer des trains de pulses de 100fs à 2GHz dans la longueur d'onde des *télécom*  $\lambda=1550\text{nm}$  et avec un très faible *jitter* de 150fs [Chen, 2008].

## Spectroscopie

La spectroscopie d'absorption est un moyen puissant de recherche fondamentale et un outil de diagnostic. Elle résulte de la mesure de l'intensité provenant d'une source lumineuse, traversant un milieu, et atténuée lorsque sa longueur d'onde coïncide avec celle d'une transition entre deux niveaux d'énergie d'un des constituants du milieu sondé.

Elle est utilisée dans des domaines relevant de la physique atomique et moléculaire, la chimie, la biologie, la médecine, l'ingénierie, l'environnement et l'astrophysique pour la compréhension de la structure de la matière à l'état liquide, solide ou gazeux ou pour la caractérisation de milieux variés (atmosphères terrestres ou planétaires, plasmas, composés biologiques...). Elle donne par exemple accès aux grandeurs essentielles caractérisant les molécules ou atomes. Ces informations facilitent ensuite l'analyse d'environnements divers (composition, concentration, température, pression, rapports de mélanges, rapports isotopiques,...).

Elle se distingue d'autres moyens de diagnostic par les qualités suivantes. Non intrusive, elle ne détruit pas l'échantillon sondé. Elle permet un sondage sur site, local ou à distance. Elle fournit un moyen non ambigu d'identification des espèces et de mesure de leur concentration. Elle accède à une large gamme dynamique de concentration sans danger de saturation irrémédiable de l'instrument. Sous certaines formes, les instruments peuvent atteindre des niveaux de détection extrêmes : jusqu'à la partie par trillion (mille milliard). Les applications sont nombreuses (cf. [Thorpe, 2008a] pour une revue récente). A titre d'exemples citons la détermination de la constitution du gaz expulsé par les poumons qui permettrait de diagnostiquer certaines pathologies [Thorpe, 2008b] et la mesure de concentration d'éthylène dans les lieux de stockage des fruits à des niveaux de l'ordre du ppb ('partie par milliard') [Wahl, 2006].

Avec un laser monofréquence, augmenter la sensibilité en plaçant l'échantillon dans un résonateur optique est une technique bien connue, qui s'explique communément en termes d'effet multipassage. Très tôt, une augmentation de la sensibilité d'absorption a été obtenue en utilisant des cuves multipassages. Kastler a suggéré [Kastler, 1962] qu'une cavité Fabry-Perot pouvait être utilisée car sa transmission est sensible aux faibles variations d'absorption intracavité. En pratique, il a été démontré [Hänsch, 1972] très tôt qu'une cavité laser était utile pour augmenter l'absorption. A cette technique est souvent préférée la séparation de l'absorbant et de la cavité laser, pour mieux caractériser les paramètres expérimentaux. Cerez et ses collaborateurs [Cerez, 1980] ont utilisé une cavité optique externe pour la spectroscopie d'absorption saturée dès 1980. L'utilisation de cavités passives en spectroscopie linéaire apparaît en 1988 [O'Keefe, 1988] avec la spectroscopie par mesure du temps de déclin (cavity ring-down spectroscopy). Son usage est désormais populaire, et se décline sous de nombreuses formes expérimentales.

Brièvement, l'utilisation de résonateurs optiques présente les avantages suivants. L'effet de multipassage augmente la longueur d'absorption effective d'un facteur  $(2F/\pi)$  où  $F$  est la finesse de la cavité. La forte puissance intra cavité stockée est intéressante en spectroscopie non linéaire. Elle a été largement exploitée en métrologie où elle permet de saturer des raies, même avec des sources de faible puissance.

De façon plus détaillée, pour mesurer l'absorption d'un gaz, que l'on note  $\alpha(\nu)$ , on emplit une cavité Fabry-Perot de ce gaz et on compare le signal transmis par la cavité avec et sans gaz. Il existe deux méthodes pour extraire  $\alpha(\nu)$  à partir de ces mesures [Thorpe, 2008a] :

- Cavity Enhanced Absorption Spectroscopy (CEAS). Cette technique repose tout simplement sur la mesure de la puissance du signal transmis en boucle ouverte (*i.e.* on balaye la fréquence du laser en appliquant, par exemple, une rampe de tension au piézo collé sur le miroir M2 de la Figure 5) ou en boucle fermée (*i.e.* lorsque le laser est asservi sur la cavité). On peut montrer que  $\alpha(\nu)$  est reliée aux mesures d'absorption avec et sans gaz dans la cavité par :

$$\frac{P_{t,avec}(\nu) - P_{t,sans}(\nu)}{P_{inc}} \approx \mathbb{F} \frac{2L}{\pi} \alpha(\nu) \quad (62)$$

où l'on voit que la sensibilité de mesure est renforcée par le facteur  $\mathbb{F}/\pi$  qui représente le nombre moyen d'aller-retour dans la cavité. Cette méthode est bien sûr sensible à la variation de la puissance du laser dans le temps, *i.e.* au bruit d'amplitude (notons qu'il existe une méthode pour s'en affranchir [Ye, 1996]).

- Cavity Ring Down Spectroscopy (CRDS). Pour s'affranchir du bruit d'amplitude de la méthode CEAS, on mesure le temps de 'vidage' de la cavité, i.e. on coupe le faisceau laser lorsque le laser et la cavité sont en résonance puis on mesure la puissance transmise, qui décroît exponentiellement, en fonction du temps. On extrait ainsi le temps caractéristique  $\tau(\nu)$  (avec et sans gaz dans la cavité) que l'on peut exprimer en fonction de  $\alpha(\nu)$  et on obtient une expression similaire à celle de la méthode CEAS :

$$\frac{\tau_{avec}(\nu) - \tau_{sans}(\nu)}{\tau_{sans}(\nu)} \approx F \frac{L}{\pi} \alpha(\nu) \quad (63)$$

Nous renvoyons à [Thorpe, 2008a] pour une comparaison des deux méthodes qui possèdent chacune leurs avantages et leurs inconvénients.

A l'heure actuelle, on peut résumer le principal enjeu en termes de recherche instrumentale en spectroscopie optique. Il s'agit de réunir les spécificités avantageuses disponibles auprès d'instruments différents en un seul concept. Ceci constitue la thématique de recherche de nombreux groupes. On attend donc de la prochaine génération d'instruments qu'elle présente les caractéristiques suivantes :

- un large domaine spectral d'observation, qui permet d'observer simultanément plusieurs composés ou d'avoir une description globale de nombreux niveaux d'énergie d'une seule espèce,
- une haute résolution spectrale, qui permet de discriminer les différentes espèces (y compris les isotopologues) ou les différentes raies d'une molécule complexe,
- une très haute sensibilité, qui permet de détecter des espèces à l'état de traces (sub-ppm) voire d'ultratracés (ppt) ou des transitions faibles de molécules plus abondantes,
- un faible temps de mesure, qui permet le diagnostic de phénomènes de courte durée de vie, les applications de temps réel, le diagnostic résolu en temps ou une sensibilité accrue à temps de mesure égal,
- une bonne exactitude de l'échelle des longueurs d'onde et de l'échelle des intensités, pour respectivement une identification non ambiguë des composés et la mesure de leur concentration.

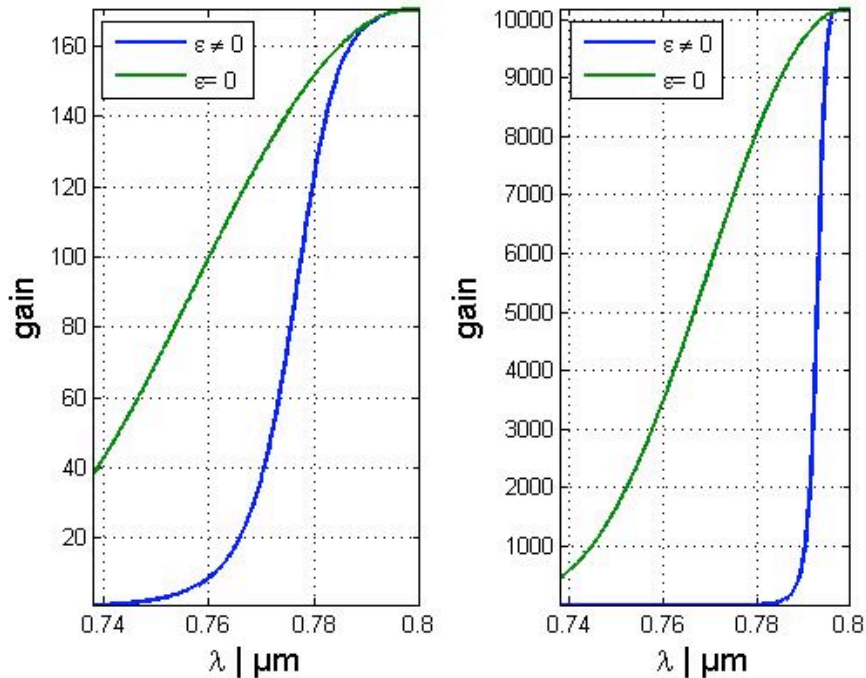
Le couplage d'une source cohérente et large bande comme un laser à modes verrouillés en phase [Gherman, 2002], une source supercontinuum [Langridge, 2008], ou un peigne de fréquences femtosecondes [Thorpe, 2006] à une cavité de haute finesse apparaît donc comme un moyen attrayant d'atteindre les objectifs de large bande spectrale et de haute sensibilité. Néanmoins, il faut tenir compte des effets spectraux, i.e. le terme  $\varepsilon(\omega_m - \omega_c)$  de l'équation (20), dans le couplage laser/cavité. La Figure 19 montre le calcul du gain de deux cavités, de basse et haute finesse, en fonction de la longueur d'onde pour  $\lambda_c = 800\text{nm}$  et pour un champ incident de distribution spectrale constante entre  $\lambda = 532\text{nm}$  et  $\lambda = 1064\text{nm}$ . Cette figure montre que plus la finesse est grande,



plus le terme  $\varepsilon(\omega_m - \omega_c)$  induit une réduction de la bande passante de la cavité (définie ici par la largeur à mi-hauteur des courbes de gain). On observe aussi que cette bande passante est de l'ordre de 15% pour la cavité de gain 160 avec  $\varepsilon(\omega_m - \omega_c) = 0$  et d'environ 9% pour la cavité de gain 10000. Une très large couverture spectrale ne peut donc pas être utilisée pleinement, en dernier ressort à cause de la technologie des revêtements multicouches des miroirs. Pour remédier à ce problème, il est possible d'utiliser une cavité où les deux miroirs sont remplacés par deux éléments prismatiques [Johnston, 2008]. Pour s'affranchir des effets de dispersion des miroirs, la méthode du 'vernier de fréquence' a été introduite [Gohle, 2007] : on décale  $f_{rep}$  et  $ISL$  de manière à n'avoir qu'une fréquence du peigne en résonance avec la cavité, puis on balaye toutes les fréquences.

Les méthodes CAES [Gherman, 2002] et CRDS [Thorpe, 2006] ont été mises en œuvre principalement en boucle ouverte ou avec un asservissement peu serré avec des lasers à modes verrouillés en phase ou des peignes de fréquences femtosecondes. Cela est justifié par les faibles temps de mesure et la plus grande souplesse du montage. Grâce à des miroirs spécialement conçus [Thorpe, 2006], des largeurs spectrales de l'ordre de 100 nm d'un peigne basé sur un laser Titane:Saphir, équivalant à 125 000 modes individuels qui ont pu être injectés dans des cavités de finesse de l'ordre de 4500. Ces méthodes sont bien adaptées à la détection de traces car elles permettent d'obtenir des sensibilités extrêmement élevées : jusqu'à  $7.9 \cdot 10^{-11} \text{ cm}^{-1} \text{ Hz}^{-1/2}$  par élément spectral [Thorpe, 2008b].

Pour analyser le rayonnement large bande à la sortie de la cavité, il est nécessaire de disposer d'un spectromètre. Toutes les approches couplant un peigne de fréquences à une cavité de haute finesse ont jusqu'à présent privilégié l'emploi de spectromètres multicanaux à réseau, ce qui constitue dans la plupart des cas la principale limitation en couverture spectrale simultanée et haute résolution spectrale. Des spectrographes utilisant les principes de dispersion croisée tels que des VIPA [Xiao, 2004] ont permis d'atteindre une limite de résolution spectrale de 800 MHz et une bande passante de l'ordre de 25 nm [Thorpe, 2008a]. La méthode du 'vernier' [Gohle, 2007] permet également en théorie de s'affranchir de la résolution du spectrographe et d'après [Gohle, 2007], de n'être limité que par le niveau de stabilité des fréquences du peigne qui atteint de nos jours un niveau relatif meilleur que  $10^{-11}$  sur une minute [Stowe, 2008]. Une alternative prometteuse en terme de spectromètres pour analyser les sources femtosecondes est fournie par les spectromètres de Fourier [Sorokin, 2007] [Coddington, 2008], mais jusqu'à présent, l'association peigne de fréquences-cavité de haute finesse-spectromètre de Fourier n'a pas été rapportée dans la littérature.



**Figure 19 :** Effet du terme de dispersion  $\varepsilon(\omega_m - \omega_c)$  sur le gain de deux cavités de basse finesse (figure de gauche) et de haute finesse (figure de droite). Un champ incident de spectre constant entre  $\lambda=532\text{nm}$  et  $\lambda=1064\text{nm}$  a été considéré pour modéliser une octave spanning du Ti:Sa.

Les publications citées en références ci-dessus sont très récentes et elles décrivent presque toutes des expériences de démonstration. La technique des peignes de fréquences associés à des cavités Fabry-Perot pour la spectroscopie devrait donc mûrir dans les années à venir.

## Production d'harmoniques

La production d'harmoniques XUV dans les gaz nobles à partir de lasers femtosecondes intenses est un sujet de recherche actif (cf. chapitre rédigé par T. Rochon dans cet ouvrage). Récemment, une nouvelle technique a été introduite pour générer ces harmoniques XUV à haute cadence (supérieure au MHz) grâce à un montage 'sur table' dans le but d'effectuer des mesures spectroscopiques directes sur les gaz rares [Jones, 2005], [Gohle, 2005]. Un laser *femto* est couplé à une cavité Fabry-Perot dans laquelle une buse envoie un jet de gaz rare à l'endroit où la taille du faisceau est minimum (*i.e.* au *waist*). Le problème est ensuite de sortir de la cavité les harmoniques XUV produites à cet endroit. Plusieurs méthodes ont été employées :

- Une lame en saphir est placée dans la cavité après la zone d'interaction laser-gaz. Cette lame, inclinée à l'angle de Brewster pour le faisceau intra-cavité, réfléchit les harmoniques XUV produites entre  $\sim 20\text{nm}$  et  $\sim 140\text{nm}$ . En optimisant le couplage laser-cavité et la

puissance crête intra-cavité, d'excellents résultats ont été obtenus [Ozawa, 2008a] ouvrant ainsi la voie d'une spectroscopie XUV.

- Un réseau de diffraction fonctionnant en réflexion est placé après la zone d'interaction laser-gaz. Ce réseau est conçu pour ne pas affecter notablement les réflexions du faisceau laser mais pour diffracter un certain nombre d'harmoniques XUV. Des rendements équivalents à ceux de la précédente méthode ont été obtenus expérimentalement [Yost, 2008].

L'introduction de matériaux dans la cavité limite la puissance crête du faisceau à cause des effets non linéaires qui peuvent apparaître (auto-focalisation, auto-modulation, ...). Pour contourner ce problème, il a été proposé de prendre en compte ces effets pour atteindre un régime intra-cavité de type 'soliton' [Kalashnikov, 2008] ou bien d'éliminer ces matériaux en faisant circuler deux pulses dans la cavité de manière à les coupler de façon non colinéaire dans le gaz [Moll, 2006]. Cette méthode permet aussi de s'affranchir de la fenêtre de saphir ou du réseau pour 'sortir' les harmoniques de la cavité. Une expérience de faisabilité a été montée et les résultats sont positifs malgré un certain nombre de problèmes qu'il reste à résoudre (par exemple, sensibilité à la forme du jet de gaz) [Ozawa, 2008b].

Notons finalement que pour cette application les publications sont récentes et que la technologie devrait mûrir et produire des résultats dans les années à venir.

## **Sources de rayons X/gamma**

### ***La Rétrodiffusion Compton***

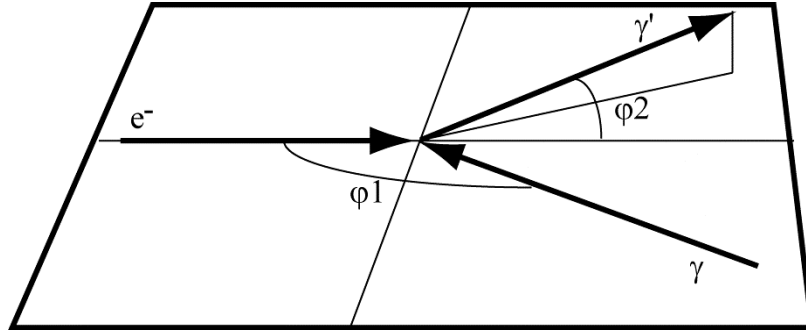
La diffusion Compton d'un photon sur un électron fut découverte en 1923. Dans la limite relativiste, la section efficace différentielle de ce processus incohérent a été calculée par Klein et Nishina [Klein, 1929] et sa cinématique permet de décrire simplement les caractéristiques de l'interaction. Considérons un processus de diffusion élastique d'un photon d'énergie  $E_\gamma$  sur un électron d'énergie  $E_e$  :  $e^- + \gamma \rightarrow e^- + \gamma$  où, dans l'état final, le photon et l'électron ont les énergies  $E'_\gamma$  et  $E'_e$  respectivement. On peut souligner les principales caractéristiques de cette réaction :

- 1) La section efficace (dite de Compton ou de Thomson lorsque le photon est rétrodiffusé) est proportionnelle à  $r_0^2$  (où  $r_0 = 2.8 \cdot 10^{-15}$  m est le rayon classique de l'électron) et est égale à  $0.665 \cdot 10^{-24}$  cm<sup>2</sup>. La probabilité de diffusion d'un photon par électron incident est donc extrêmement faible.

L'énergie du photon est obtenue à partir de la conservation du quadrivecteur impulsion énergie. Dans la limite ultra relativiste  $E_e \gg m_e c^2 \gg \Gamma E_\gamma$  et pour des petits angles de diffusion on obtient [Rullhusen, 1998] :

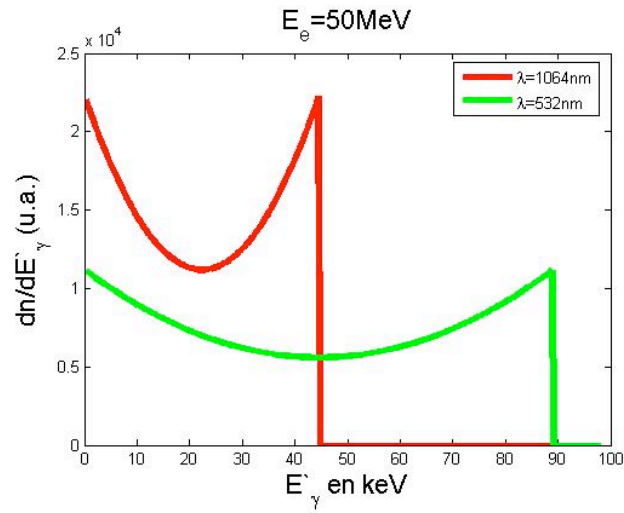
$$E'_\gamma \approx \frac{2\Gamma^2 E_\gamma (1 - \cos\phi_1)}{1 + (\Gamma\phi_2)^2 + 2\Gamma \frac{E_\gamma}{m_e c^2} (1 - \cos\phi_1)} \quad (64)$$

Où  $\Gamma = E_e / m_e c^2$  est le facteur relativiste de Lorentz, et où  $\cos\phi_{1,2}$  indiquent respectivement l'angle de collision et de diffusion du photon par rapport à l'axe de propagation de l'électron (cf. Figure 20). Dans le cas d'une collision frontale relativiste avec rétrodiffusion ( $\phi_1 = \pi$ ,  $\phi_2 = 0$ ) on peut remarquer que l'énergie du photon diffusé est maximale et amplifiée par un facteur  $4\Gamma^2$  :  $E'_{\gamma, \max} = 4\Gamma^2 E_\gamma$ . Le facteur de *boost* en énergie  $\Gamma^2$  peut être vu comme la multiplication d'un facteur  $\Gamma$  qui vient de la transformée de Lorentz par rapport au référentiel du laboratoire et d'un facteur  $\Gamma$  résultant de l'effet Doppler relativiste. La Figure 21 montre la distribution d'énergie des photons diffusés pour un faisceau d'électron de 50 MeV et pour un faisceau de photons incidents provenant du fondamental et de la seconde harmonique d'un laser YAG. On voit que le spectre d'énergie est à peu près plat entre 0 et une énergie maximale  $E'_{\gamma, \max}$ .

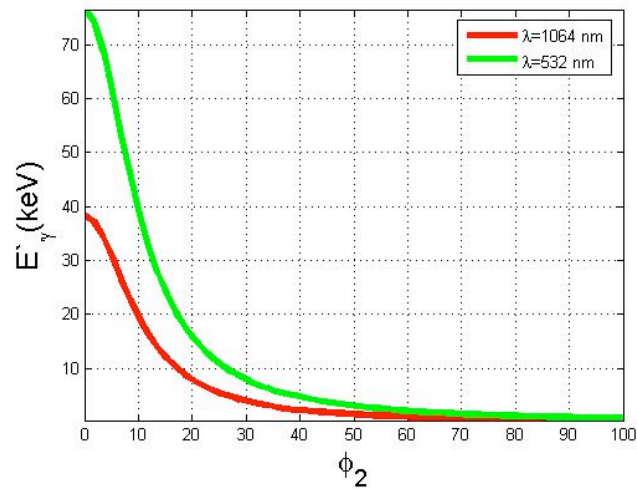


**Figure 20 :** Cinématique de l'effet Compton:  $\gamma$  et  $\gamma'$  représentent respectivement les photons avant et après la diffusion.

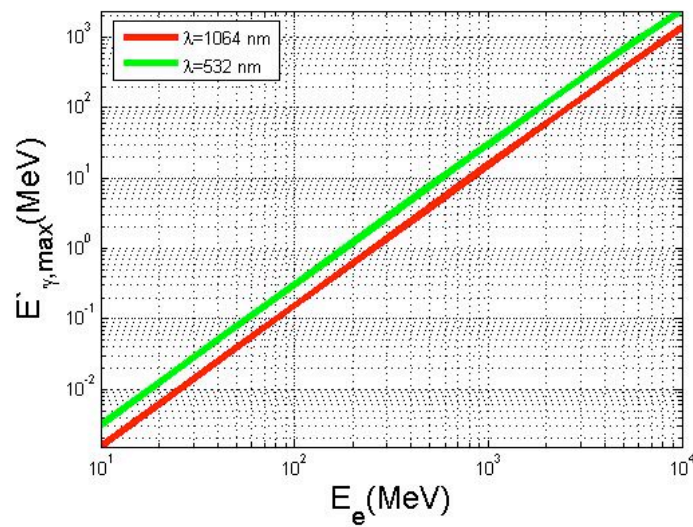
- 2) L'équation (64) montre que le flux d'énergie est concentré autour de la direction de propagation des électrons dans un angle solide d'ouverture de l'ordre de  $1/\Gamma$ . La Figure 22 montre la relation entre l'énergie du photon diffusé et son angle d'émergence  $\phi_2$ . On remarque qu'en plaçant un collimateur autour de la direction  $\phi_2 = 0$ , on peut créer un faisceau quasi mono énergétique de photons dont l'énergie vaut  $\sim E'_{\gamma, \max}$ .
- 3) Les spins du photon et de l'électron incidents ont une influence sur la section différentielle, mais cela est négligeable à 'faible énergie' (*i.e.*  $E_e$  inférieure à quelques GeV). Les différences sont appréciables pour des faisceaux d'électrons de la dizaine de GeV et au-delà et peuvent être utilisées, par exemple, pour mesurer avec précision l'énergie [Arnaudon, 1992] et la polarisation des faisceaux d'électrons [Placidi, 1989] (cf. aussi [Falletto, 2001], [Zomer, 2003] où des cavités Fabry-Perot de hautes finesses en mode continu ont été utilisées).



**Figure 21 :** Spectre d'énergie des photons Compton diffusés.



**Figure 22 :** Corrélation entre l'angle de diffusion et l'énergie de photon Compton diffusés.



**Figure 23 :** Energie maximale des photons Compton diffusés en fonction de l'énergie des faisceaux d'électrons.

La Figure 23 montre l'énergie maximale des photons diffusés en fonction de l'énergie des électrons pour le fondamental et la première harmonique d'un laser YAG. On remarque tout l'intérêt de la diffusion Compton : la production de faisceaux de rayons X ou gamma quasi monochromatiques. Si l'on regarde le problème d'un point de vue expérimental, on peut donc résumer les avantages et inconvénients de la production de rayons X ou gamma par effet Compton :

- 1) Le flux est fortement limité par la faible section efficace de l'interaction Compton. Les récents développements sur les technologies concernant les lasers à forte puissance moyenne [Roser, 2005] et les cavités Fabry-Perot en mode pulsé [Jones, 2001] permettent cependant d'envisager aujourd'hui l'utilisation de l'effet Compton pour des applications industrielles et dans les sciences médicales. Un effort supplémentaire en R&D est par ailleurs demandé pour des applications dans la physique fondamentale [Araki, 2005].
- 2) L'énergie du photon diffusé est amplifiée, au maximum, d'un facteur  $4\Gamma^2$ . Cette caractéristique rend l'effet Compton très attractive (cf. Figure 21) par rapport à d'autres sources de rayonnements telles que les grands accélérateurs à rayonnement synchrotron.
- 3) La dépendance angulaire du spectre des photons diffusés est donnée par la convolution de la divergence naturelle du paquet d'électrons avec la fonction caractéristique de l'effet Compton. Si la divergence  $\sigma_x$  des électrons au point d'interaction est  $\ll 1/\Gamma$  on a une forte corrélation entre l'angle de diffusion et l'énergie du photon, les plus énergétiques étant émis sur l'axe de propagation des électrons. Un simple diaphragme peut donc bien rendre monochromatique le spectre photonique.
- 4) La polarisation du photon émis est dépendante de la polarisation du laser et de l'énergie du photon émis. Il est donc possible, toujours avec un diaphragme, d'obtenir des paquets de photons avec un certain degré de polarisation.

Il est évident que les points 2 et 3 rendent très attractif l'effet Compton pour sa capacité à produire des photons durs avec des accélérateurs de particules de dimensions et coûts réduits et pour la possibilité d'obtenir des faisceaux monochromatiques (avec  $E_{\max}/\Delta E$  entre 1 et 10%) avec un simple diaphragme. La polarisation, étant une fonction de l'énergie, peut aussi être déterminée par un diaphragme.

### ***Physique des hautes énergies et physique fondamentale : source de positrons polarisés.***

Pour les projets de futurs collisionneurs linéaires électrons positrons, *International Linear Collider* (ILC) et *Cern Linear Collider* (CLIC), il est primordial de mesurer avec précision l'état de polarisation des faisceaux avant

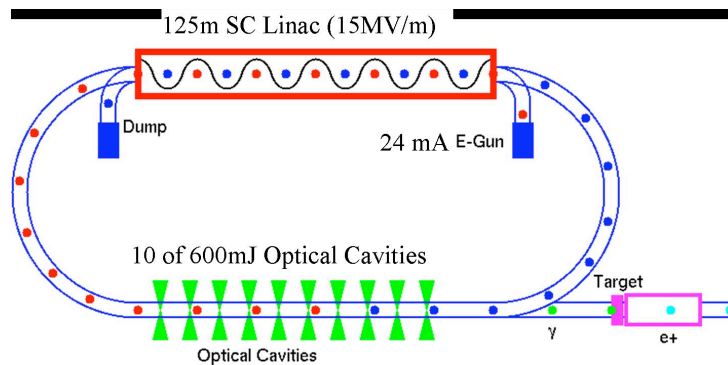
collision mais aussi de pouvoir disposer de faisceaux d'électrons et de positrons avec un important degré de polarisation [Moortgat-Pick, 2005]. Nous avons déjà indiqué que l'on peut mesurer la polarisation grâce à l'effet Compton et nous allons voir que ce même processus peut être utilisé pour produire des positrons polarisés.

Des faisceaux d'électrons polarisés sont produits avec d'excellentes performances en utilisant des photocathodes en GaAs [Sinclair, 2007] photo-déclenchées par laser. Un degré de polarisation d'environ 80% peut être obtenu sans dégradation des performances d'émission de courant. Par contre la production de positrons polarisés pour les futurs collisionneurs linéaires est fortement restreinte par les performances requises sur le courant (9mA sur des trains de paquets d'électrons de 1.3 msec) et sur l'émittance des faisceaux d'électrons et de positrons. Cela implique un taux de production de positrons bien au-delà des sources existantes, indépendamment d'ailleurs de la polarisation.

Pour la production de positrons, on utilise des rayons gamma de très haute énergie ( $> 10$  MeV). Ces photons, en traversant une cible amorphe, produisent des paires  $e^+e^-$ . Ces paires sont ensuite séparées et la population de positrons est capturée et accélérée pour être envoyée dans des anneaux d'amortissement. D'un état de polarisation circulaire du photon incident résultera des positrons polarisés longitudinalement. Actuellement deux méthodes différentes sont proposées pour la production des rayons gamma polarisés circulairement. La première utilise un onduleur hélicoïdal à l'intérieur duquel circule un faisceau d'électrons de très grande énergie (150 GeV pour l'ILC). Le rayonnement synchrotron, produit à l'intérieur de l'onduleur, présente un bon degré de polarisation circulaire. La deuxième méthode est basée sur la diffusion Compton qui permet, comme nous l'avons vu plus haut, de produire des rayons gamma de quelques dizaines de MeV avec un faisceau primaire d'électrons de quelques GeV (cf. Figure 24). Les avantages du schéma Compton sont multiples. Dans le cas de l'onduleur, en effet, le besoin d'un faisceau d'électrons d'énergie supérieure à 100 GeV oblige à utiliser le faisceau primaire d'électrons que l'on refait circuler après son passage dans l'onduleur pour produire les collisions  $e^+e^-$ . Cela induit de l'inter-corrélation difficile à gérer entre les sources de positrons. En plus, il faut absolument éviter que le passage dans l'onduleur ne dégrade les caractéristiques du faisceau. Une source Compton peut, quant à elle, être réalisée avec un accélérateur complètement indépendant de la machine à électrons principale et avec un coût réduit.

Le vrai problème du schéma Compton reste la faible valeur de la section efficace et donc l'impossibilité de créer tous les photons gamma nécessaires pour la production des paquets de positrons dans une seule interaction. C'est pour cette raison que plusieurs propositions basées sur la possibilité d'accumuler à très haute fréquence les paquets de positrons dans un anneau de stockage [Araki, 2005] ont émergées. Pour cela, il faut maximiser l'énergie de l'impulsion laser, avec un très fort taux de répétition (i.e. avec une forte puissance moyenne), en accumulant les impulsions dans un résonateur

optique. Cela représente un vrai défi technologique puisqu'il est nécessaire d'atteindre le régime de quelque méga Watts circulant dans une cavité.



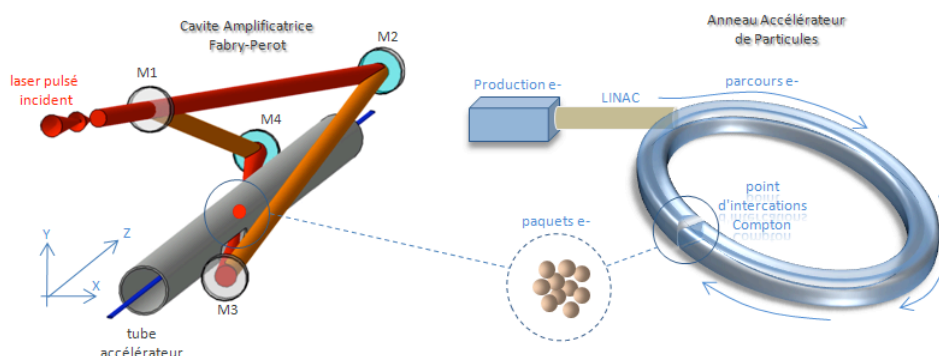
**Figure 24 :** Schéma de principe d'une machine à électrons fonctionnant sur le mode Energy Recovery Linac [Ben-Zvi, 2006] pour la production des positrons polarisés. Dix cavités à l'intérieur desquelles circulent des faisceaux d'énergie 600mJ/pulse sont nécessaire pour cette application...

### **Physique appliquée à l'industrie, au médical et à la conservation du patrimoine.**

L'efficacité de la diffusion Compton dans l'amplification de l'énergie du photon incident (cf. Figure 21) peut être utilisée dans un domaine d'énergie plus faible et dans différents contextes [Sprangle, 1992]. Du fait de l'importance de pouvoir disposer d'une source de rayonnement cohérent dans le domaine des rayons X durs ou gamma tout en utilisant des accélérateurs de particules à très faibles énergies (10-100MeV) ouvre la porte à une nouvelle génération de machine de lumière. Dans ce domaine d'énergie, les machines à électrons sont très compactes et d'un coût extrêmement réduit (cf. Figure 25). Il est donc possible de produire des photons de quelques dizaines de keV, une énergie atteignable jusqu'à maintenant seulement dans les grands instruments que sont les anneaux de lumière de synchrotron. Nota : les tubes à rayons X présentent de très faibles flux, surtout lorsque l'on réduit la bande spectrale pour rendre le flux monochromatique et unidirectionnel.

Les dimensions et le 'faible' coût, par contre, permettent l'installation d'une machine Compton dans différents sites comme les hôpitaux, les universités, les centres de recherche, les musées, etc. Jusqu'à présent, l'utilisation de telles machines n'était pas envisagée pour des applications industrielles compte tenu du faible flux. Mais récemment, les impressionnantes améliorations des performances de l'amplification des lasers à blocage de modes et des résonateurs optiques permettent d'envisager l'utilisation de machines Compton dans plusieurs domaines.





**Figure 25 :** Schéma de principe d'une machine à rayon X compacte Compton. La figure de gauche montre le résonateur à quatre miroirs non planaire développé au LAL/Orsay. La circonférence d'un anneau dans lequel circulent des électrons de 50MeV est typiquement de l'ordre de 6 m à 10 m.

La première démonstration d'un anneau Compton à faible énergie fut effectuée à SLAC. Une société privée ([www.lynceantech.com](http://www.lynceantech.com)) qui opère dans les domaines de la cristallographie et de la structure des protéines a ensuite vu le jour. Cette première utilisation d'une petite machine Compton comme *mini source* de lumière (en pratique il s'agit d'un petit anneau de lumière de synchrotron de quelques mètres de circonférence, cf. Figure 25) a suscité un fort intérêt dans la communauté scientifique (<http://www.ca.infn.it/alghero2008/>). De nombreux projets, utilisant différentes technologies pour les accélérateurs d'électrons et pour la source laser ont vu le jour de par le monde : des accélérateurs linéaires *chauds* avec des lasers à forte puissance incidente en tir direct [Schoenlein, 1996], des accélérateurs supraconducteurs couplés avec des lasers de fortes puissances et des cavités Fabry-Perot et des anneaux couplés à des lasers à forte puissance moyenne et des résonateurs optiques de finesse à la limite de la technologie existante ([www.lynceantech.com](http://www.lynceantech.com)).

Le succès de ces projets permettra beaucoup d'autres applications où des faisceaux de photons monochromatiques de quelques dizaines de keV avec un flux compris entre les  $10^8 \gamma \text{ s}^{-1}$  et  $10^{13} \gamma \text{ s}^{-1}$  et une largeur de spectre qui peut varier entre 0.1% et 10% sont requis.

Un de ces domaines d'application est l'imagerie médicale où les utilisations du rayonnement X monochromatique sont multiples et peuvent être concurrentielles des derniers développements obtenus en IRM. Travaillant en absorption, par l'injection d'un agent de contraste (Gadolinium, Or, Baryum, Iode etc.) on peut obtenir, grâce à la technique appelée 'K-Edge subtraction', des images à très haute résolution. Plusieurs résultats sur les rats et sur les singes démontrent l'efficacité de cette technique et son applicabilité dans le domaine de l'angiographie dynamique, l'artériographie et la coronographie [Pouraboué, 2004], [Risser, 2006], [Kelly, 2007], [Elleau, 2000]. Des études cliniques en mammographie et en artériographie ont déjà été faites sur des patients en utilisant aussi plusieurs méthodes d'imagerie optique à contraste de phase [Castelli, 2007].

Cependant, l'utilisation d'agents de contrastes est surtout envisagée avec beaucoup d'intérêt pour la radiothérapie de certaines tumeurs (technique dite

SSRT, Stereotactic Synchrotron Radiation Therapy). Cette nouvelle technique de thérapie oncologique est basée sur l'absorption résonante par l'agent de contraste du rayonnement monochromatique. L'électron dans la couche K est expulsé en provoquant une cascade Auger qui augmente de façon très importante le rapport entre la dose déposée dans le tissu malade et le tissu sain. Les tests préliminaires effectués sur les rats avec du Cisplatine ont démontré une augmentation de près de 700% du taux de survie des cobayes auxquels avaient été inoculés des glioblastomes (tumeurs cérébrales) [Adam, 2006], [Biston, 2004]. C'est grâce à ces résultats que la machine de lumière de Synchrotron ESRF a décidé de se doter d'une ligne SSRT pour effectuer des tests cliniques en 2009 [Renier, 2008].

Des résultats et des ouvertures très importantes sont donc attendus dans le futur immédiat concernant l'utilisation des machines Compton dans le domaine médical. L'atout majeur des 'machines Compton' est leurs dimensions réduites, permettant leur emploi dans un environnement hospitalier.

Un autre domaine d'application très important est la préservation du patrimoine et l'histoire de l'art. De fait, plusieurs techniques de diffraction, luminescence, spectroscopie, etc. (XPRD, mXRF, XANES....) dans le domaine des rayons X permettent une multitude d'analyses non destructives sur des pièces archéologiques et des œuvres artistiques [Cotte, 2007] [Mazel, 2007].

L'analyse chimique des matériaux, la radiographie et la laminographie permettent de recueillir une quantité très importante d'informations sur la datation, les matériaux utilisés, les techniques et procédés artistiques, l'attribution et la genèse temporelle d'une œuvre d'art ou d'une pièce archéologique de dimension aussi grande qu'un bateau [Sandström, 2002]. La détection de différentes couches de peinture et la possibilité de reconstruire les images sous-jacentes à la peinture visible permettent aussi de révéler des œuvres cachées par une surimpression de peintures successives (cf. la très belle analyse d'un tableau de Van Gogh [Dik, 2008]).

A nouveau, la possibilité d'effectuer ces types d'analyse *in situ*, grâce aux futures sources Compton, est extrêmement importante vu la délicatesse de l'opération et les coûts d'assurances et de transport très élevés auxquels il faut faire face si l'on veut analyser les œuvres avec les machines de lumière de synchrotron.

Si l'on considère des domaines d'énergie de photons plus élevés, de quelques centaines de keV à quelques MeV, il est possible d'envisager des applications dans le domaine nucléaire en employant la fluorescence nucléaire résonante. Il existe deux applications majeures : la gestion du stockage des déchets radioactifs et la détection des radionucléides dans le cadre de la surveillance d'éventuels trafics délictueux d'armes nucléaires dans les aéroports, ports, etc. [Hajima, 2008].

En résumé, la possibilité de pouvoir augmenter le flux des sources Compton de quelques ordres de grandeur par rapport à l'état de l'art actuel, grâce à des nouvelles techniques d'amplification laser, aux résonateurs optiques de haute

finesse et aux accélérateurs d'électrons, permettra d'explorer des domaines scientifiques qui vont de la recherche fondamentale à la physique appliquée. Dans la recherche fondamentale, ces techniques peuvent fournir des possibilités très intéressantes dans le domaine des sources pour les futurs collisionneurs linéaires. Concernant les applications pratiques, une nouvelle génération de machines de lumière que l'on peut considérer comme des mini-anneaux synchrotron est en train de se développer en utilisant différentes technologies. La compacité de ces machines et leurs coûts relativement faibles permettent de songer à plusieurs domaines d'utilisations et à l'ouverture d'un marché.

## Remerciements

Nous remercions nos collègues du CELIA, M.C. Nadeau et S. Montant pour la relecture et les commentaires qu'ils ont apportés à ce document. Nous remercions aussi C. Bourge et J. Brosselard pour la relecture et la mise page.

## Bibliographie

- JF Adam et al., Prolonged survival of Fischer rats bearing F98 glioma after iodine-enhanced synchrotron stereotactic radiotherapy, *Int. J. Radiat. Oncol. Biol. Phys.* **64**, 603–611 (2006).
- D.W. Allan, Statistics of atomic frequency standards, *Proc. of IEEE* **54**, 221-230 (1966).
- D.W. Allan, H. Hellwig, P. Kartaschoff, J. Vanier, J. Vig, G.M.R. Winkler, N.F. Yannoni, Standard terminology for fundamental frequency and time metrology, 42nd Annual Frequency Control Symposium (1988).
- S. Araki et al., Conceptual design of a polarised positron source based on laser Compton scattering, CARE-ELAN-DOCUMENT-2005-013, CLIC-NOTE-639, KEK-PREPRINT-2005-60, LAL-05-94 (2005).
- L. Arnaudon et al., Measurement of LEP beam energy by resonant spin depolarisation, *Phys. Lett. B* **284**, 431-439 (1992).
- J. Barnes, A. R. Chi, L.S. Cutler, D.J. Healey, D.B. Leeson, T.E. McGunigal, J.A. Mullen, Jr., W.L. Smith, R.L. Sydnor, R.F.C. Vessot, et G.M.R. Winkler, Characterization of Frequency Stability, *IEEE Trans. Instr. Meas.* **20**, 105-120 (1971).
- A. Bartels, D. Heinecke, S.A. Diddams, Passively mode-locked 10 GHz femtosecond Ti:sapphire laser, *Opt. Lett.* **33**, 1905-1907 (2008).
- E. Benkler, H. R. Telle, A. Zach, and F. Tauser, Circumvention of noise contributions in fiber laser based frequency combs," *Opt. Express* **13**, 5662–5668 (2005).
- JM. Bennett et al., Comparison of the properties of titanium dioxide films prepared by various techniques, *Appl. Opt.* **28**, 3303-3317 (1989).
- I.Ben-Zvi et al. Energy recovery Linacs in high energy and nuclear physics, *Nucl. Instr. Meth A* **557**, 28-35 (2006).

- M.C. Biston, et al., Cancer research **64**, Cure of Fisher rats bearing radioresistant F98 glioma treated with cis-platinum and irradiated with monochromatic synchrotron X-rays, 2317-2323 (2004)
- ED. Black, An introduction to Pound-Drever-Hall laser frequency stabilisation, Am. J. Phys. **69**, 79-87 (2001).
- E. Castelli et al., Clinical mammography at the SYRMEP beam line, Nucl. Instr. Meth. A **572**, 237-240 (2007).
- P. Cerez, A. Brillet, C.N. Manpichot, R. Felder. He-Ne lasers stabilized by saturated absorption in iodine at 612 nm, IEEE Trans. Instrum. Meas. **29**, 352-354 (1980).
- J. Chen et al., generation of low-jitter femtosecond pulse train with 2GHz repetition rate via external repetition rate multiplication, Opt. Lett. **33**, 959-961 (2008).
- WY. Cheng et al., Stabilizing the frequency of femtosecond Ti:sapphire comb laser by a novel scheme, Appl. Phys. B **92**, 13-18 (2008).
- I. Coddington, W.C. Swann, N.R. Newbury, Coherent multiheterodyne spectroscopy using stabilized optical frequency combs, Phys. Rev. Lett. **100**, 013902 (2008).
- M. Cotte et al., Synchrotron-baser X-ray spectromicroscopy used for study of an atypical micrometric pigment in 16<sup>th</sup> century paintings, Anal. Chem., **79**, 6988-6994 (2007).
- E.R. Crosson, P. Haar, G.A. Marcus, H.A. Schwettman, B.A. Paldus, T.G. Spence and R.N. Zare, "Pulse-stacked cavity ring-down spectroscopy", rev. Sci. Instr. **70**, 4-10 (1999).
- S.T. Cundiff, Phase stabilization of ultrashort optical pulses, J. Phys. D: Appl. Phys. **35**, R43-R59 (2002).
- S.T. Cundiff et J. Ye, Colloquium: Phase Femtosecond optical frequency comb, Rev. Mod. Phys. **75**, 325-342 (2003).
- P. Del'Haye, O. Arcizet, A. Schliesser, R. Holzwarth and T.J. Kippenberg, Full Stabilization of a Microresonator Frequency Comb, Phys. Rev. Lett. **101**, 053903 (2008)
- JC. Diels et W. Rudolph, Ultrashort laser pulse phenomena. Ed. Elsevier (2006).
- J. Dik et al., Visualization of a lost painting by Vincent van Gogh using synchrotron radiation based X-ray fluorescence elemental mapping, Anal. Chem., 6436-6442 (2008).
- RW. Drever et al., laser phase and frequency stabilization using an optical resonator, Appl. Phys. B **31**, 97-105 (1983).
- H. Elleaume et al., First human transvenous coronary angiography at the European Synchrotron Radiation Facility, Phys. Med. Biol. **45**, 39-43 (2000).
- N. Falletto, Etude, conception et réalisation d'une cavité Fabry-Perot pour le polarimètre Compton de TJNAF, Thèse de L'Université Joseph Fourier (1999).
- N. Falletto et al., Compton scattering off polarized electrons with a high-finesse Fabry-Perot cavity at JLab, Nucl. Instr. Meth. A **459**, 412-425 (2001).

- T. Gherman et D. Romanini, Mode-locked cavity-enhanced absorption spectroscopy, *Opt. Expr.* **10**, 1034-1042 (2002).
- C. Gohle et al., A frequency comb in the extreme ultraviolet, *Nature* **436**, 234-232 (2005).
- C. Gohle, B. Stein, A. Schliesser, T. Udem et T.W. Hänsch, Frequency comb vernier spectroscopy for broadband, high-resolution, high-sensitivity absorption and dispersion spectra, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 263902-263904 (2007)
- E. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*. 3<sup>ième</sup> Ed. McGraw-Hill (2005).
- Hajima et al., Proposal of Nondestructive Radionuclide Assay Using a High-Flux Gamma-Ray Source and Nuclear Resonance Fluorescence, *Journal of Nuclear Science and Technology* **45**, 441-451 (2008).
- J.L. Hall, M.S. Taubman et J. Ye, Laser stabilization, in *OSA Handbook V14* (1999).
- T.W. Hänsch, A.L. Schawlow, P. Toschek . Ultrasensitive response of a CW dye laser to selective extinction, *IEEE J. of Quant. Elec.* **QE-8**, 802-804 (1972).
- T.W Hänsch, Nobel lecture: passion for precision, *Rev. Mod. Phys.* **78**, 1297-1309 (2006).
- E. Hecht, *Optics*. 4<sup>ième</sup> Ed. Addison Wesley (2002).
- Hewlett Packard, *The Science of Timekeeping*, Application Note 1289 (1997).
- C.J. Hood, H.J. Kimble et J. Ye, Characterization of high-finesse mirrors: Loss, phase shifts, and mode structure in optical cavity, *Phys. Rev. A* **64**, 033804-033807 (2001).
- IEEE standard definitions of physical quantities for fundamental frequency and time metrology, *IEEE Std.*, 1139-1988 (1988).
- P.S. Johnston and K.K. Lehmann, Cavity enhanced absorption spectroscopy using a broadband prism cavity and a supercontinuum source, *Opt. Expr.* **16**, 15013-15023 (2008)
- R.J Jones, J.C. Diels, J. Jasapara et W. Rudolph, Stabilisation of the frequency, phase, repetition rate of an ultra-short pulse train to a Fabry-Perot cavity, *Opt. Comm.* **175**, 409-418 (2000).
- R.J Jones et J.C. Diels, Stabilisation of femtosecond lasers for optical metrology and direct optical to radio frequency synthesis, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 3288-3291 (2001).
- R.J Jones, I. Thomann and J. Ye, precision stabilization of femtosecond lasers to high-finesse optical cavities, *Phys. Rev. A* **69**, 051803(R) (2004).
- R.J. Jones, Phase-coherent frequency combs in vacuum ultraviolet via high-harmonic generation inside a femtosecond enhancement cavity, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 193201-193204 (2005).
- V.L. Kalashnikov, femtosecond pulse enhancement in external resonator: impact of dispersive and nonlinear effects, *Appl. Phys. B* **92**, 19-23 (2008).
- P. Kartaschoff, *Frequency and Time*, Ed. Academic Press (1978).

- A. Kastler. Atomes à l'intérieur d'un interféromètre de Perot-Fabry, *Appl. Opt.* **1**, 17-24 (1962).
- A. Kastler, Transmission d'une impulsion lumineuse par un interféromètre Fabry-Perot, *Nouv. Rev. Optique* **3**, 133-139 (1974).
- M.E. Kelly et al. Synchrotron-based intravenous cerebral angiography in a small animal model, *Phys. Med. Biol.* **52**, 1001-1012 (2007).
- O.Klein, Y.Nishina, Über die Streuung von Strahlung durch freie Elektronen nach der neuen relativistischen Quantendynamik von Dirac, *Z. Phys.* **52**, 853-868 (1929).
- H. Kogelnik et T. Li, Laser beams and resonators, *Appl. Opt.* **5**, 1550-1567 (1966).
- J.M. Langridge, T. Laurila, R.S. Watt, R.L. Jones, C.F. Kaminski, J. Hult, Cavity enhanced absorption spectroscopy of multiple trace gas species using a supercontinuum radiation source, *Opt. Expr.* **16**, 10178-10188 (2008).
- C.H. Li, et al., A laser frequency comb that enables radial velocity measurements with a precision of 1cm/s, *Nature* **452**, 610-612 (2008).
- L.-S. Ma, Z. Bi, A. Bartels, L. Robertsson, M. Zucco, R.S. Windeler, G. Wilpers, C. Oates, L. Hollberg, S.A. Diddams, Optical Frequency Synthesis and Comparison with Uncertainty at the 10<sup>-19</sup> Level, *Science* **303**, 1843-1845 (2004).
- V. Mazel et al., Identification of Ritual Blood in African Artifacts Using TOF-SIMS and Synchrotron Radiation Microspectroscopies, *Anal. Chem.*, **79**, 9253-9260 (2007).
- J. Morville, D. Romanini, M. Chenevier et A. Kachanov, Effects of laser phase noise on the injection of a high-finesse cavity, *Appl. Opt.* **41**, 6980-6990 (2002).
- K.D. Moll, R.J. Jones et J. Ye, Output coupling methods for cavity based high-harmonic generation, *Opt. Expr.* **14**, 8189-8197 (2006).
- G. Moortgat-Pick et al., "The Role of polarized positrons and electrons in revealing fundamental interactions at the linear collider", *Phys. Rep.* **460**, 131-243 (2008).
- A. O'Keefe et DAG. Deacon, Cavity ring-down optical spectrometer for absorption measurements using pulsed laser sources, *Rev. Sci. Instrum.* **59**, 2544-2551 (1988).
- A. Ozawa et al., Non colinear high harmonic generation: a promising outcoupling method for cavity assisted XUV generation, *Opt. Expr.* **16**, 6233-6239 (2008a).
- A. Ozawa et al., High harmonic frequency combs for high resolution spectroscopy, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 253901-253904 (2008b).
- M.A. Persaud, J.M. Tolchard et A.I Ferguson, efficient generation of picosecond pulses at 243nm, *IEEE J. Quant. El.* **26**, 1253-1258 (1990).
- JC. Petersen et AN. Luiten, Short pulses in optical resonators, *Opt. Exp.* **11**, 2975-2981 (2003).
- M. Placidi, R. Rossmanith, e<sup>+</sup>e<sup>-</sup> polarimetry at LEP, *Nucl. Instr. Meth. A* **274**, 79-94 (1989).
- F. Plouraboué et al., X-ray high-resolution vascular network imaging, *J. of Microscopy* **215**, 139-148 (2004).

- E.O. Potma, C. Evans, X.S. Xie, R.J. Jones et J. Ye, Picosecond-pulse amplification with an external passive optical cavity, *Opt. Lett.* **28**, 1835-1837 (2003).
- M. Renier et al., The radiotherapy clinical trials projects at the ESRF: Technical aspects, *Eur. J. Radiol.* **3703** (2008).
- L. Risser et al., From homogeneous to fractal normal and tumorous micro-vascular networks in the brain, *J. of Cerebral Blood Flow and Metabolism* **27**, 293-303 (2007).
- F. Röser et al., "131 W 220 fs fiber laser system", *Opt. Lett.* **30**, 2754-2756 (2005).
- P. Rullhusen, X. Artru, P. Dhez, Novel radiation sources using relativistic electrons, *World Scientific, Series on Synchrotron Radiation Techniques and Applications* 4, (1998).
- C. K. Sinclair et al., Development of a high average current polarized electron source with long cathode operational lifetime, *PR Special Topics - Accelerators and Beams* **10**, 1098-4402 (2007).
- C. Salomon, D. Hils et J.L. Hall, Laser stabilization at the millihertz level, *J. Opt. Soc. Am. B* **5**, 1576-1587 (1988).
- M. Sandström et al., Deterioration of the seventeenth-century warship Vasa by internal formation of sulphuric acid, *Nature* **415**, 893-897 (2002).
- A. Schliesser, C. Gohle, T. Udem et T.W. Hansch, Complete characterization of a broadband high-finesse cavity using an optical frequency comb, *Opt. Expr.* **13**, 5975-5983 (2006).
- R.W. Schoenlein et al., Femtosecond X-ray Pulses at 0.4 Å Generated by 90° Thomson Scattering: A Tool for Probing the Structural Dynamics of Materials, *Science* **274**, 236-238 (1996).
- R.P. Scott, C. Langrock et B.H. Kolner, High-Dynamic-Range, Laser Amplitude and Phase Noise Measurement Techniques, *IEEE J. Sel. topics in Quant. El.* **7**, 641-645 (2001).
- E. Sorokin, I.T. Sorokina, J. Mandon, G. Guelachvili, N. Picqué, Sensitive multiplex spectroscopy in the molecular fingerprint 2.4 μm region with a Cr<sup>2+</sup>:ZnSe femtosecond laser, *Opt. Expr.* **15**, 16540-16545 (2007).
- P. Sprangle, A. Ting, E. Esarey, et A. Fisher, Tunable, short pulse hard X-rays from compact laser synchrotron source, *J. Appl., Phys.* **72**, 5032-5034 (1992).
- M.C. Stowe et al., Direct frequency comb spectroscopy, *Adv. In Atom., Mol. and Opt. Phys.* **55**, 1-60 (2008).
- R. Teets, J. Eckstein and TW Hansch, Coherent two-photon excitation by light pulses, *Phys. Rev. Lett.* **38**, 760-764 (1977).
- H. R. Telle, B. Lipphardt, and J. Stenger, "Kerr-lens, modelocked lasers as transfer oscillators for optical frequency measurements," *Appl. Phys. B* **74**, 1-6 (2002).
- M.J. Thorpe, R.J. Jones, R. Lalezari, K.D. Moll et J. Ye, Precise measurements of optical cavity dispersion and mirror coating properties via femtosecond combs, *Opt. Expr.* **13**, 882-888 (2005).

- M.J. Thorpe, K.D. Moll, R.J. Jones, B. Safdi et J. Ye, Broadband cavity ringdown spectroscopy for sensitive and rapid molecular detection, *Science* **311**, 1595-1599 (2006).
- M.J. Thorpe et J. Ye, Cavity-enhanced direct frequency comb spectroscopy, *Appl. Phys. B* **91**, 397-414 (2008a).
- M.J. Thorpe, D. Balslev-Clausen, M.S. Kirchner et J. Ye, Cavity-enhanced optical frequency comb spectroscopy: application to human breath analysis, *Opt. Expr.* **16**, 2387-2397 (2008b).
- T. Udem, J. Reichert, R. Holzwarth et T.W. Hänsch, Accurate measurement of large optical frequency differences with a mode-locked laser, *Opt. Lett.* **24**, 881-883 (1999).
- T. Udem, R. Holzwarth et T.W. Hänsch, Optical frequency metrology, *Nature* **416**, 233-237 (2002).
- Y. Vidne, M. Rosenbluh et T.W. Hänsch, Pulse picking by phase-coherent additive pulse generation in an external cavity, *Opt. Lett.* **28**, 2396-2398 (2003).
- E.H. Wahl, S.M. Tan, S. Koulikov, B. Kharlamov, C.R. Rella et E.R. Crosson, Ultra-sensitive ethylene post-harvest monitor based on cavity ring-down spectroscopy, *Opt. Expr.* **14**, 1673-1684 (2006).
- E.A. Whittaker, M. Gehrtz et G.C. Bjorklund, Residual amplitude modulation in laser electro-optic phase modulation, *J. Opt. Soc. Am. B* **2**, 1320-1326 (1985).
- S. Xiao et A.M. Weiner, 2-D wavelength demultiplexer with potential for >1000 channels in the C-band, *Opt. Expr.* **12**, 2895-2902 (2004).
- J. Ye, L.S. Ma et J.L. Hall, Sub-Doppler optical frequency reference at 1.064 $\mu$ m by means of ultrasensitive cavity-enhanced frequency modulation spectroscopy of a C<sub>2</sub>HD overtone transition, *Opt. Lett.* **21**, 1000-1002 (1996).
- J. Ye et S.T. Cundiff, *Femtosecond optical frequency comb technology*. Ed. Springer (2005).
- P. Yeh, *Optical waves in layered media*. Ed. Wiley (1988).
- D.C. Yost, T.R. Schibli et J. Ye, Efficient output coupling of intracavity high-harmonic generation, *Opt. Lett.* **33**, 1099-1101 (2005).
- A. M Weiner. Femtosecond pulse shaping using spatial light modulators, *Rev. Sci. Instrum.* **71**, 1929–1960 (2000).
- F. Zomer, A high power Fabry-Perot resonator for precision Compton polarimetry with the longitudinally polarised lepton beams at HERA, *Mémoire d'habilitation à Diriger des Recherches, Université Paris 11 sud LAL 03/12* (2003).